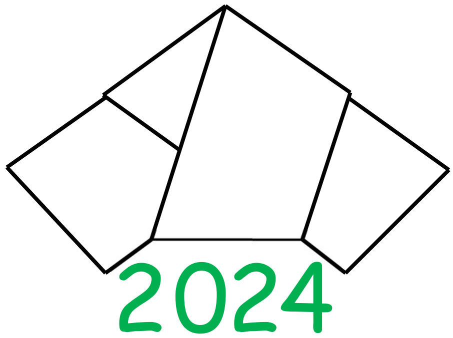
38. Landeswettbewerb Mathematik

Baden-Württemberg

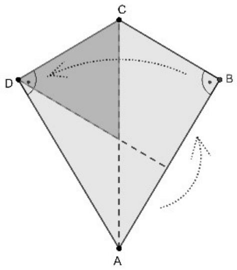


Aufgabe 1

Alma schreibt mehrere natürliche Zahlen an die Tafel, von denen keine zwei gleich sind.
Das Produkt der drei kleinsten dieser Zahlen ist 12.
Das Produkt der drei größten dieser Zahlen ist 120.
Welche Zahlen kann Alma an die Tafel geschrieben haben?
Bestimme alle Möglichkeiten.

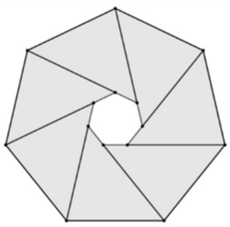
Aufgabe 2

Miriam hat ein Drachenviereck $ABCD$ aus Papier ausgeschnitten. Es hat einen spitzen Innenwinkel bei A, der größer als 60° ist, und rechte Innenwinkel bei B und D.
Zunächst faltet Miriam dieses Viereck so, dass B auf D liegt, und faltet es dann wieder auf. Danach faltet sie es so, dass die Faltkante durch D verläuft und der Punkt A auf der Strecke $\overline{AB}$ zu liegen kommt.
Zeige, dass das von den Faltkanten und der Seite $\overline{CD}$ gebildete Dreieck gleichschenklig ist.



Aufgabe 3

Für jede Zahl $n \geq 7$ gibt es n kongruente gleichschenklige Dreiecke, die einen „n-Eck-Ring" bilden, der außen und innen von einem regelmäßigen n-Eck begrenzt wird. Die Abbildung zeigt das am Beispiel $n = 7$.
Bestimme alle Zahlen $n \geq 7$, für die diese Dreiecke stumpfwinklig sind.



Aufgabe 4

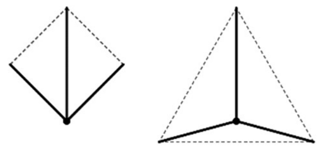
Von 2024 positiven ganzen Zahlen ist bekannt, dass keine zwei gleich sind und dass ihr arithmetisches Mittel 2024 ist. Die größte dieser Zahlen wird mit M bezeichnet.
Welchen kleinsten und welchen größten Wert kann M annehmen?
Begründe deine Antwort.

Aufgabe 5

Mischa wählt aus den natürlichen Zahlen von 1 bis n fünf Zahlen aus.
Er berechnet alle Abstände zwischen jeweils zwei dieser fünf Zahlen. Dabei stellt er fest, dass keine zwei dieser Abstände gleich sind.
Bestimme das kleinste n, für das Mischa fünf Zahlen so ausgewählt haben kann.
Bemerkung: Mit „Abstand zwischen zwei Zahlen" ist der Betrag der Differenz dieser Zahlen gemeint.

Aufgabe 6

Drei Stäbe sind an einem gemeinsamen Punkt drehbar befestigt. Sie können so gedreht werden, dass ihre freien Enden zusammen mit dem gemeinsamen Punkt die Eckpunkte eines Quadrates bilden.
Sie können aber auch so gedreht werden, dass ihre freien Enden wie in der Abbildung die Eckpunkte eines gleichseitigen Dreiecks bilden.
Bestimme die Größen der drei Winkel, die die drei Stäbe dabei im gleichseitigen Dreieck einschließen.



.

Einzelheiten zur Auswahl der Aufgaben, zur Korrektur und zu den Preisen kannst du den Teilnahmebedingungen auf der Rückseite dieses Blattes entnehmen. Drei wichtige Informationen sofort:

- Du kannst Lösungen zu maximal vier Aufgaben einsenden.
- Einsendeschluss ist der **07.11.2024**. (Eingang beim Organisationsteam)
- Einsendeadresse: Hebel-Gymnasium, Landeswettbewerb Mathematik Torsten Rupf, Simmlerstraße 1, 75172 Pforzheim
- weitere Informationen auf **www.landeswettbewerb-mathematik.de**

- -✂- - - - - - - - - -✂- - - - - - - - - -✂- - - - - - - - - -✂- - - - - - - - - -✂- - - - - - - - -✂- - - - - - - - - -✂- - - - - - - - -

Klar, da mache ich mit! Bitte diesen Abschnitt in Druckschrift deutlich lesbar ausfüllen, ausschneiden und auf das erste Blatt der Lösungen kleben. Bei Gruppenarbeit bitte für jedes Mitglied einen Abschnitt ausfüllen und aufkleben.

Zu unserer Unterstützung bitten wir unbedingt um die zusätzliche Eingabe der Daten in ein Online-Formular auf unserer Homepage: www.landeswettbewerb-mathematik.de (Weitere Informationen s. Rückseite)

Name: …………………………………………………… Vorname: …………………………………… Klassenstufe: ………

Straße/Hausnr.: ………………………………………… PLZ/Wohnort: ……………………………………………………

weiblich ☐ männlich ☐ divers ☐

E-Mail: ……………………………………………………… Online-Anmeldung erfolgt: ja ☐ nein ☐ (Bitte ankreuzen)

Name der Schule: ……………………………………… PLZ/Schulort: ……………………………………………………

Gruppenarbeit: ja ☐ nein ☐ (Bitte ankreuzen)

Nummern der bearbeiteten Aufgaben (höchstens **vier**) bitte ankreuzen:

1	2	3	4	5	6

Ich bestätige hiermit, alle Aufgaben selbständig bzw. nur in Zusammenarbeit mit den Gruppenmitgliedern gelöst zu haben.
Die Informationen zum Datenschutz auf der Homepage des Landeswettbewerbs habe ich gelesen und stimme der Speicherung und Verarbeitung der Daten für die Abwicklung des Wettbewerbs zu, auch im Falle der Eingabe in das Online-Formular.

Unterschrift Teilnehmer: ……………………………………… Erziehungsberechtigter………………………………………………

Teilnahmebedingungen und Hinweise

* Teilnahmeberechtigt sind alle Schülerinnen und Schüler aus Baden-Württemberg, die eine Gemeinschaftsschule, Realschule oder ein Gymnasium bis Klassenstufe 10 einschließlich besuchen.
* Für den Wettbewerb werden die Lösungen von höchstens vier der sechs Aufgaben gewertet. Bis einschließlich Klassenstufe 9 können diese vier Aufgaben beliebig ausgewählt werden. Teilnehmerinnen und Teilnehmer der Klassenstufe 10 dürfen aus den Aufgaben 2 bis 6 auswählen.
* **Für eine schnellere Erfassung der Daten, erbitten wir unbedingt die zusätzliche Eingabe der Daten in ein Online-Formular auf unserer Homepage.**
* In der ersten Runde ist Gruppenarbeit zugelassen. Eine Gruppe kann aus bis zu drei Mitgliedern bestehen. Besucht mindestens ein Gruppenmitglied die Klassenstufe 10, so werden nur Lösungen zu den Aufgaben 2 bis 6 gewertet.
* Bei jeder Aufgabe sind vier Punkte erreichbar. Jeder Einzelteilnehmer mit mindestens acht Punkten erhält eine Urkunde und einen Buchpreis. Die Mitglieder einer Gruppe erhalten eine Urkunde. Für einen ersten Preis sind mindestens 14 Punkte erforderlich, für einen zweiten Preis mindestens 11 Punkte.
* Einzelteilnehmer und Gruppenmitglieder, die einen ersten oder zweiten Preis erhielten, können sich durch die Teilnahme an der zweiten Runde für ein mehrtägiges mathematisches Seminar qualifizieren. In der zweiten Runde ist keine Gruppenarbeit mehr zugelassen. Zu diesen Seminaren werden bis zu 60 Jugendliche eingeladen. Es entscheidet das Ergebnis der zweiten Runde.
* Die in der ersten Runde erfolgreichsten „Juniorstarter" aus Klasse 6 werden zu einem ein- bis zweitägigen mathematischen Seminar eingeladen.
* Für die Lösung jeder Aufgabe ist ein gesondertes Blatt DIN A4 zu verwenden, das jeweils mit dem Namen zu versehen ist.
* Der Wettbewerb bietet den Schülerinnen und Schülern die Möglichkeit, sich selbstständig durch eigene Denkleistung mit mathematischen Problemen zu beschäftigen. Daher ist die Nutzung einer künstlichen Intelligenz zum Zweck der Lösungsfindung ebenso wie das Gespräch mit Expertinnen oder Experten, das über reine Verständnisfragen hinausgeht, nicht mit dem Gebot der Selbstständigkeit vereinbar.
* Jede Einsendung muss auf der ersten Seite mit der unterschriebenen Erklärung versehen sein, dass alle Aufgaben selbstständig bzw. nur in Zusammenarbeit mit den Gruppenmitgliedern gelöst wurden. Die Selbstständigkeit bleibt gewahrt, wenn zu Fragen der Dokumentation um Hilfe nachgesucht wird oder Begriffe in der Aufgabenstellung erfragt werden. Nachfragen sind auch unter info@landeswettbewerb-mathematik.de möglich.
  Ein Verstoß gegen diese Teilnahmebedingungen – dazu zählt etwa auch die missbräuchliche Nutzung von Internetforen – wird mit Disqualifikation geahndet.
* Zu einer vollständig richtigen Lösung gehört insbesondere, dass alle wesentlichen Zwischenschritte aufgeführt und begründet sind. Die bloße Angabe eines Zahlwertes oder von Beispielen genügt nicht als Lösung. Bei der Verwendung von mathematischen Sätzen, die aus dem Unterricht oder aus dem Schulbuch nicht bekannt sind, ist eine präzise, vollständige Formulierung und eine genaue Quellenangabe, jedoch kein Nachweis erforderlich. Gegen die Verwendung eines Computerprogramms oder eines Taschenrechners als Hilfsmittel zur Ideenfindung bzw. Rechnungskontrolle ist nichts einzuwenden, doch müssen in der Darstellung der Lösung die für den jeweiligen Nachweis wesentlichen Schritte und Resultate ohne diese Hilfsmittel nachvollziehbar und überprüfbar sein.
* Die Korrekturentscheidung ist endgültig und unterliegt nicht dem Rechtsweg.
* Nach Abschluss der Korrektur erhalten alle Teilnehmer Nachricht über das Ergebnis und Lösungsbeispiele zu allen Aufgaben.
* Eine Rücksendung der korrigierten Arbeiten ist aus organisatorischen Gründen nicht möglich. Es empfiehlt sich deshalb, eine Kopie anzufertigen, um die eigenen Lösungen mit den Lösungsbeispielen vergleichen zu können.
* Die ausreichend frankierten Zuschriften (Umschlag DIN A4) sind zu richten an:

  Hebel-Gymnasium
  Landeswettbewerb Mathematik
  Torsten Rupf
  Simmlerstraße 1
  75172 Pforzheim

  Einsendeschluss ist der **07.11.2024** (Eingang beim Organisationsteam).
* Übungsmaterial:
  Die Aufgaben und Lösungen früherer Wettbewerbe sind auf einer CD erschienen und können über info@landeswettbewerb-mathematik.de angefordert werden.

Lösungsbeispiel aus dem vergangenen Jahr und Tipps

Die folgende Lösung einer Wettbewerbsaufgabe aus der ersten Runde des vergangenen Jahres zeigt dir, dass du mit den Kenntnissen der Mittelstufe erfolgreich teilnehmen kannst.

Aufgabe 2

Florian schreibt eine dreistellige Zahl an die Tafel und erkennt: „Meine Zahl ist durch 3 teilbar." David vertauscht die ersten beiden Ziffern von Florians Zahl und bemerkt: „Meine Zahl ist durch 4 teilbar." Nun vertauscht Mirjam die letzten beiden Ziffern von Davids Zahl und stellt fest: „Meine Zahl ist durch 5 teilbar."
Welche Zahl kann Florian an die Tafel geschrieben haben? Bestimme alle Möglichkeiten.

Lösung: Möglich ist eine der sechs Zahlen 522, 552, 582, 516, 546, 576.

Beweis:
Wir bezeichnen die Ziffern der von Florian angeschriebenen Zahl mit a, b und c, wobei $a \neq 0$ ist. Dann hat Florians Zahl die Darstellung abc, Davids Zahl bac und Mirjams Zahl bca.

- Da bca durch 5 teilbar sein soll und $a \neq 0$ ist, folgt mit der Teilbarkeitsregel durch 5, dass $a = 5$ ist.
- Da bac durch 4 teilbar sein soll und $a=5$ ist, folgt mit der Teilbarkeitsregel durch 4, dass $c=2$ oder $c=6$ gilt.
- Falls $a=5$ und $c=2$ ist, folgt wegen der Teilbarkeitsregel durch 3, dass $a+b+c=5+b+2=b+7$ durch 3 teilbar sein muss. Folglich muss $b=2$, $b=5$ oder $b=8$ sein. Also kann Florians Zahl 522, 552 oder 582 sein.
- Falls a=5 und c=6 ist, folgt wegen der Teilbarkeitsregel durch 3, dass $a+b+c=5+b+6=11+b$ durch 3 teilbar sein muss. Folglich muss $b=1$, $b=4$ oder $b=7$ sein. Also kann Florians Zahl 516, 546 oder 576 sein.

Eine Probe bestätigt, dass jede der 6 Zahlen alle Bedingungen der Aufgabenstellung erfüllt.

So, und nun bist du dran. Bei den umstehenden neuen Wettbewerbsaufgaben sollst du den Beweis führen.
Notiere in deinen Beweisen bei jedem Schritt, welchen Satz du verwendest. Z.B. schreibe „Nach dem Winkelsummensatz für Dreiecke gilt .....". Wenn du keinen Namen des Satzes kennst, so kannst du den Satz auch umschreiben: „Da in einem Dreieck die Winkelsumme 180° beträgt, folgt nun ....". Es muss nur bei jedem Schritt deutlich werden, was du verwendest und wie du schließt.
Auch wenn du eine Aufgabe nicht vollständig lösen kannst oder nicht alle Schritte vollständig begründen kannst, so schreibe doch bitte trotzdem deinen Lösungsanfang und deine Ideen für die Lösung auf. Vielleicht fehlen nur noch wenige Schritte zur vollständigen Lösung.
Beim Lösen einer Geometrieaufgabe helfen dir vielleicht die folgenden Punkte:

- *Mache dir eine genaue Zeichnung und überprüfe den Aufgabentext anhand der Zeichnung ganz genau. Überzeuge dich, dass du die Aufgabe richtig verstehst. Falls du die Aufgabe nicht ganz verstehst, so kannst du fragen, z.B. unter* info@landeswettbewerb-mathematik.de
- *Kennzeichne in der Zeichnung alle gegebenen und gesuchten Größen mit unterschiedlichen Farben.*
- *Überprüfe, ob du in der Figur gleichschenklige oder gar gleichseitige Dreiecke erkennen kannst. Welche Folgerungen kannst du dann für die Innenwinkel in solchen Dreiecken ziehen?*
- *Zeichne Hilfslinien ein, dadurch entstehen oft neue Figuren.*
- *Aus Zeichnungen kannst du nur Beweisideen entnehmen, diese musst du dann noch begründen. Begründungen wie „Durch Nachmessen erkenne ich ...." oder „Ich sehe in der Zeichnung, dass...." genügen nicht.*
- *Versuche durch* Vorwärtsarbeiten *(also ausgehend von den Voraussetzungen) weitere Beziehungen herzuleiten.*
- *Versuche auch durch* Rückwärtsarbeiten *(was müsste erfüllt sein, damit ich den Beweis führen kann?) voranzukommen.*
- *Überlege, ob du mit einem Kongruenzsatz eine Länge oder einen Winkel erschließen kannst.*
- *Überlege, ob du die Aufgabe in einem Spezialfall lösen kannst – manchmal erhält man dabei eine Idee für den allgemeinen Fall.*