38. Landeswettbewerb Mathematik
Baden-Württemberg

Lösungsbeispiele für die
Aufgaben der 1. Runde 2024/2025

Aufgabe 1

Alma schreibt mehrere natürliche Zahlen an die Tafel, von denen keine zwei gleich sind.
Das Produkt der drei kleinsten dieser Zahlen ist 12.
Das Produkt der drei größten dieser Zahlen ist 120.
Welche Zahlen kann Alma an die Tafel geschrieben haben?
Bestimme alle Möglichkeiten.

Lösung:

An der Tafel können die folgenden Zahlenkombinationen stehen:

1. Lösung: $1, 2, 6, 10$
2. Lösung: $1, 3, 4, 10$
3. Lösung: $1, 3, 4, 5, 6$

1. Beweis :

Die Zahl 12 kann nur auf zwei Weisen als Produkt dreier verschiedener natürlicher Zahlen geschrieben werden: $12 = 1 \cdot 2 \cdot 6$ und $12 = 1 \cdot 3 \cdot 4$.
Im ersten Fall muss die 2 auch zu den größten drei Zahlen gehören, weil schon das kleinste andernfalls mögliche Produkt $6 \cdot 7 \cdot 8 = 336 > 120$ ist. Die größten drei Zahlen können hier also nur $2, 6$ und $120 : (2 \cdot 6) = 10$ sein.
In zweiten Fall ist entweder auch die 3 eine der drei größten Zahlen, so dass nur $3, 4$ und $120 : (3 \cdot 4) = 10$ diese Zahlen sein können, oder aber die drei gehört nicht zu den drei größten Zahlen. Dann sind $4, 5$ und 6 die kleinsten drei möglichen Zahlen, die die drei größten Zahlen an der Tafel bilden können. Da ihr Produkt genau 120 ist, müssen es genau diese drei Zahlen sein, so dass in diesem Fall $1, 3, 4, 5, 6$ an der Tafel stehen. Damit sind alle Fälle betrachtet.

2. Beweis (Vollständige Fallunterscheidung):

Die kleinste Zahl muss gleich 1 sein, denn wären alle Zahlen größer als 1, dann wäre das Produkt der drei kleinsten Zahlen mindestens gleich $2 \cdot 3 \cdot 4 = 24 > 12$. Daher kann die Zahl 12 nur auf zwei Weisen als Produkt dreier verschiedener natürlicher Zahlen entstehen:
$12 = 1 \cdot 2 \cdot 6$ (1. Fall) und $12 = 1 \cdot 3 \cdot 4$ (2. Fall).
Die drei größten Zahlen sind dann ebenfalls alle größer als 1.

Man kann die Zahl 120 nur auf die folgenden Weisen als Produkt dreier natürlicher Zahlen größer 1 schreiben:

a) $2 \cdot 3 \cdot 20$

b) $2 \cdot 4 \cdot 15$

c) $2 \cdot 5 \cdot 12$

d) $2 \cdot 6 \cdot 10$ (*)

e) $3 \cdot 4 \cdot 10$ (**)

f) $3 \cdot 5 \cdot 8$ (***)

g) $4 \cdot 5 \cdot 6$ (****)

Somit kann die kleinste der drei größten Zahlen nur die Zahl $2, 3$ oder 4 sein.

1. Fall: Die Zahlen 1, 2 und 6 sind die drei kleinsten Zahlen an der Tafel.

Fall a) Die kleinste der drei größten Zahlen ist die Zahl 2.
Dann ist die zweitkleinste der drei größten Zahlen gleich 6. Somit bleibt in diesem Fall nur das Produkt $2 \cdot 6 \cdot 10$ (*) und liefert die erste Lösung:
An der Tafel können die Zahlen $1, 2, 6, 10$ stehen.
(Es ist $1 \cdot 2 \cdot 6 = 12$ und $2 \cdot 6 \cdot 10 = 120$)

Fall b) Die kleinste der drei größten Zahlen ist die Zahl 6.
In diesem Fall gibt es keine Lösung, da die Zahl 120 nicht als Produkt dreier verschiedener natürlicher Zahlen größer oder gleich 6 geschrieben werden kann.

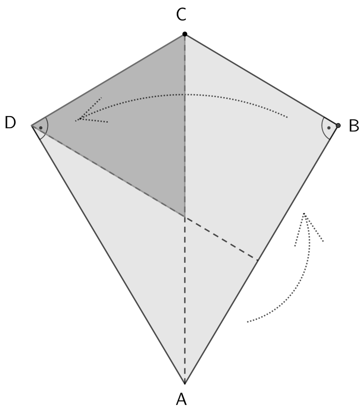
2. Fall: Die Zahlen $1, 3$ und 4 sind die drei kleinsten Zahlen an der Tafel

Fall a) Die kleinste der drei größten Zahlen ist die Zahl 3.
Dann ist zwingend die Zahl 4 die zweitkleinste der drei größten Zahlen, sodass das Produkt $3 \cdot 5 \cdot 8$ (***) nicht möglich ist.
Für diesen Fall bleibt das nur Produkt $3 \cdot 4 \cdot 10$ (**) und liefert die zweite Lösung:
An der Tafel können die Zahlen $1, 3, 4, 10$ stehen.
(Es ist $1 \cdot 3 \cdot 4 = 12$ und $3 \cdot 4 \cdot 10 = 120$)

Fall b) Die kleinste der drei größten Zahlen ist die Zahl 4.
In diesem Fall ist nur das Produkt $4 \cdot 5 \cdot 6$ (****) möglich, welches die dritte Lösung liefert:
An der Tafel können die Zahlen $1, 3, 4, 5, 6$ stehen.
(Es ist $1 \cdot 3 \cdot 4 = 12$ und $4 \cdot 5 \cdot 6 = 120$)

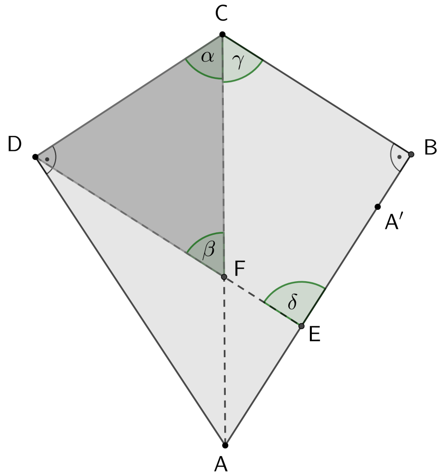
Weitere Fälle und somit weitere Lösungen sind nicht möglich.

Aufgabe 2



Miriam hat ein Drachenviereck $ABCD$ aus Papier ausgeschnitten. Es hat einen spitzen Innenwinkel bei A, der größer als $60°$ ist, und rechte Innenwinkel bei B und D. Zunächst faltet Miriam dieses Viereck so, dass B auf D liegt, und faltet es dann wieder auf. Danach faltet sie es so, dass die Faltkante durch D verläuft und der Punkt A auf der Strecke $\overline{AB}$ zu liegen kommt.
Zeige, dass das von den Faltkanten und der Seite $\overline{CD}$ gebildete Dreieck gleichschenklig ist.

1. Beweis (mit Winkeljagd):



Wir bezeichnen die Punkte und Winkel wie in nebenstehender Skizze: E ist der Schnittpunkt der zweiten Faltkante mit der Strecke $\overline{AB}$, F ist der Schnittpunkt der beiden Faltkanten, A' ist der Punkt, auf dem der Punkt A beim Falten zu liegen kommt, $\alpha = \angle DCF, \beta = \angle CFD, \gamma = \angle FCB$ und $\delta = \angle BED$.
Wir zeigen, dass $\alpha = \beta$ gilt, woraus die Behauptung folgt, dass das Dreieck $\triangle FCD$ gleichschenklig ist mit den Schenkeln $\overline{FD}$ und $\overline{CD}$.
Jede der beiden Faltkanten ist eine Symmetrieachse:

- Bezüglich der ersten Faltkante AC sind die Punkte B und D spiegelsymmetrisch und
- bezüglich der zweiten Faltkante DE sind die Punkte A' und A spiegelsymmetrisch.

Die zweite Faltkante DE steht senkrecht auf der Geraden AB, weil der Punkt A und sein Bildpunkt A' bei Spiegelung an der Gerade DE beide auf der Geraden AB liegen. Daher gilt $\delta = 90°$.
Zusammen mit $\angle CBA = 90°$ folgt, dass die Geraden BC und DE zueinander parallel sind.
Da die Punkte B und D spiegelsymmetrisch bezüglich der Faltkante AC liegen, sind die Dreiecke $\triangle ABC$ und $\triangle ADC$ kongruent. Insbesondere ist daher

$$\alpha = \gamma \quad . \tag{1}$$

Die Winkel γ und β sind Wechselwinkel an den geschnittenen Parallelen BC und ED. Daher gilt

$$\beta = \gamma \quad . \tag{2}$$

Mit (1) und (2) folgt direkt die Behauptung $\alpha = \beta$.

Variante (ebenfalls Winkeljagd):

Wie vorher zeigen wir $\alpha = \gamma$ und $\delta = 90°$.
Wegen der Innenwinkelsumme von 360° im Viereck $FEBC$ folgt

$$360° = \gamma + \angle CBE + \delta + \angle EFC = \gamma + 90° + 90° + \angle EFC \iff \angle EFC = 180° - \gamma\,.$$

Andererseits sind die Winkel β und $\angle EFC$ Nebenwinkel und ergeben daher zusammen 180°. Es folgt:

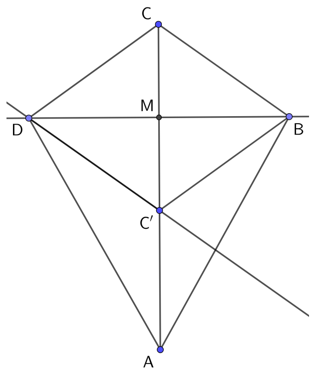
$$\beta = 180° - \angle EFC = 180° - (180° - \gamma) = \gamma\,,$$

also die Behauptung.

2. Beweis (mit Spiegelung an BD):

Wir betrachten zunächst ein beliebiges Drachenviereck $ABCD$ mit Symmetrieachse AC und Diagonalenschnittpunkt M, d.h.

$$\left|\overline{BC}\right| = \left|\overline{DC}\right| \text{ und } \left|\overline{AB}\right| = \left|\overline{AD}\right|.$$

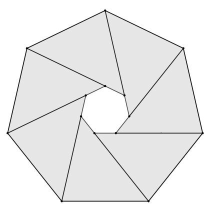


Das Bild des Punktes C bei Spiegelung am Diagonalenschnittpunkt M bezeichnen wir mit C'.
Da M und C auf der Geraden AC liegen, liegt auch der Punkt C' auf der Geraden AC.
Außerdem ist das Viereck $C'BCD$ punktsymmetrisch zum Punkt M. Folglich ist das Viereck $C'BCD$ ein Parallelogramm.
Wegen $\left|\overline{BC}\right| = \left|\overline{DC}\right|$ ist $C'BCD$ sogar eine Raute.
Insbesondere sind die Geraden BC und $C'D$ parallel.

Fordern wir nun zusätzlich $\angle CBA = \angle ADC = 90°$, d.h. die Gerade AB ist senkrecht zur Geraden BC.
Dann folgt, dass BC auch senkrecht zu $C'D$ ist, denn BC ist parallel zu $C'D$.
Dann liegt aber das Bild des Punktes A bei Spiegelung an $C'D$ auf der Geraden AB.
Die Gerade $C'D$ ist also die zweite Faltkante aus der Aufgabenstellung und das Dreieck $C'CD$ das Dreieck, von dem gezeigt werden soll, dass es gleichschenklig ist.
Da das Viereck $C'BCD$ eine Raute ist, folgt die Behauptung direkt, denn es gilt dann $\left|\overline{C'D}\right| = \left|\overline{CD}\right|$.

Aufgabe 3

Für jede Zahl $n \geq 7$ gibt es n kongruente gleichschenklige Dreiecke, die einen „n-Eck-Ring“ bilden, der außen und innen von einem regelmäßigen n-Eck begrenzt wird. Die Abbildung zeigt das am Beispiel $n = 7$.
Bestimme alle Zahlen $n \geq 7$, für die diese Dreiecke stumpfwinklig sind.



Lösung:

Für alle ganzen Zahlen größer als 8 sind die Dreiecke stumpfwinklig.

1. Beweis (mit Innenwinkelweite im regelmäßigen n-Eck):

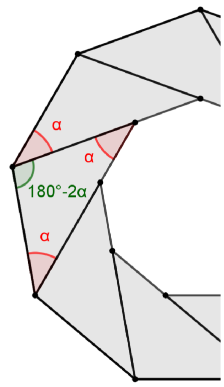
Wenn wir die Größe eines Basiswinkels der n kongruenten gleichschenkligen Dreiecke mit α bezeichnen, dann hat ein Winkel an der Spitze die Größe $180° - 2\alpha$. Folglich ist $\alpha < 90°$. Da die Dreiecke stumpfwinklig sein sollen, muss gelten

$$180° - 2\alpha > 90° \quad \Longleftrightarrow \quad \alpha < 45°\,.$$

Ein Innenwinkel β_n in einem regelmäßigen n-Eck hat die Größe

$$\beta_n = 180° - \frac{360°}{n}\,.$$

Für $n \geq 7$ ist $\beta_n > 90°$. Daher kann β_n nicht durch die beiden spitzen Winkel der gleichschenkligen Dreiecke $(2 \cdot \alpha < 90°)$ zusammengesetzt werden.
Ein Innenwinkel β_n des äußeren n-Ecks setzt sich also aus einem Basiswinkel α und einem Winkel $180° - 2 \cdot \alpha$ an der Spitze zusammen.
Es folgt $\beta_n = 180° - 2 \cdot \alpha + \alpha = 180° - \alpha$:



$$180° - \frac{360°}{n} = 180° - \alpha$$
$$\frac{360°}{n} = \alpha < 45°$$

Auflösen nach n liefert

$$n > \frac{360°}{45°} = 8 \quad .$$

Variante(Außenwinkelsumme):

Bekanntlich ist die Summe der Außenwinkel in einem konvexen n-Eck gleich 360°.
Ein Außenwinkel des inneren regelmäßigen $n - Ecks$ ist gleich α, die Summe der Außenwinkel gleich $n \cdot \alpha$.
Daher folgt $360° = n \cdot \alpha$.
Mit $\alpha < 45°$ folgt wie vorher $n > 8$.

Aufgabe 4

Von 2024 positiven ganzen Zahlen ist bekannt, dass keine zwei gleich sind und dass ihr arithmetisches Mittel 2024 ist. Die größte dieser Zahlen wird mit M bezeichnet.
Welchen kleinsten und welchen größten Wert kann M annehmen?
Begründe deine Antwort.

Lösung:

Die kleinste Wert, den die Zahl M annehmen kann, ist 3036, der größte ist 2049300.

1. Beweis (mit Ungleichungen):

Wir bezeichnen die 2024 Zahlen mit a_i, $i = 1, 2, \ldots, 2024$ und sortieren sie der Größe nach, d.h. $a_1 < a_2 < a_3 < \cdots < a_{2023} < a_{2024} = M$.

- $M \leq 2049300$
  Da die Zahlen positiv, ganz und paarweise verschieden sein sollen, gilt

$$a_1 \geq 1, \quad a_2 \geq 2, \quad \dots \quad , a_{2023} \geq 2023 \quad .$$

  Für die Summe der ersten 2023 Zahlen folgt

$$a_1 + a_2 + \cdots a_{2023} \geq 1 + 2 + \cdots + 2023 = \frac{2023 \cdot 2024}{2} \tag{1}$$

  Für das arithmetische Mittel der 2024 Zahlen gilt

$$2024 = \frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_{2023} + M}{2024} .$$

  Multiplikation mit 2024 und Einsetzen der Ungleichung (1) ergibt

$$2024^2 = a_1 + a_2 + \cdots + a_{2023} + M \geq \frac{2023 \cdot 2024}{2} + M \quad .$$

  Subtraktion von $\frac{2023 \cdot 2024}{2}$ ergibt

$$2049300 = 2024^2 - \frac{2023 \cdot 2024}{2} \geq M \quad .$$

  M kann diesen Wert auch annehmen, wenn man $a_1 = 1, a_2 = 2, \dots, a_{2023} = 2023$ und $M = 2049300$ wählt.

- $M \geq 3036$
  Da die Zahlen ganz und paarweise verschieden sein sollen, gilt

$$a_{2023} \leq M - 1, \quad a_{2022} \leq M - 2, \quad \dots \quad , a_2 \leq M - 2022, \quad a_1 \leq M - 2023 \quad .$$

  Für die Summe der ersten 2023 Zahlen folgt

$$a_1 + a_2 + \cdots a_{2023} \leq 2023 \cdot M - (1 + 2 + \cdots + 2023) = 2023 \cdot M - \frac{2023 \cdot 2024}{2} \tag{2}$$

  Für das arithmetische Mittel der 2024 Zahlen gilt $2024 = \frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_{2023} + M}{2024}$. Multiplikation mit 2024 und Einsetzen der Ungleichung (2) ergibt

$$2024^2 = a_1 + a_2 + \cdots + a_{2023} + M \leq 2023 \cdot M - \frac{2023 \cdot 2024}{2} + M = 2024 \cdot M - \frac{2023 \cdot 2024}{2} \quad .$$

  Addition von $\frac{2023 \cdot 2024}{2}$ und Division durch 2024 ergibt $3035,5 \leq M$. Da M ganzzahlig sein muss, folgt

$$3036 \leq M \quad .$$

  Diesen Wert 3036 kann M auch annehmen. Dazu können wir z.B. Paare von Zahlen mit der Summe $4048 = 2 \cdot 2024$ bilden (dann wäre der Mittelwert aller 2024 Zahlen offensichtlich 2024):

$$4048 = a_1 + M = a_2 + a_{2023} = a_3 + a_{2022} = \cdots = a_{1012} + a_{1013} \quad ,$$

konkret:

$$a_1 = 1012,\ a_2 = 1013, \quad \dots \quad, a_{1012} = 2023,$$
$$a_{1013} = 2025,\ a_{1014} = 2026, \quad \dots \quad, a_{2023} = 3035\,,\ M = 3036$$

Damit haben wir gezeigt, dass 3036 der kleinste und 2049300 der größte Wert ist, den M annehmen kann.

Variante (etwas weniger formal):

Wir zeigen zuerst, dass der größte Wert, den M annehmen kann,

$$2024^2 - \frac{2023 \cdot 2024}{2} = 2049300$$

ist. Danach wird gezeigt, dass der kleinste Wert, den M annehemn kann, 3036 ist.

1. $M \leq 2049300$
   Wir bezeichnen die Summe der 2023 Zahlen, die kleiner als M sind, mit s.
   Für das arithmetische Mittel der 2024 Zahlen gilt $2024 = \frac{s+M}{2024}$. Auflösen nach M liefert
   $$M = 2024^2 - s\,.$$
   Folglich ist M maximal, wenn s möglichst klein ist. Da die 2024 Zahlen positiv ganzzahlig und paarweise verschieden sind, kann die Summe s nicht kleiner sein als die Summe der kleinsten 2023 positiven ganzen Zahlen, d.h. s ist mindestens
   $$1 + 2 + 3 + \dots + 2023 = \frac{2023 \cdot 2024}{2} = 2047276\,.$$
   Für M folgt, dass es höchstens $2024^2 - 2047276 = 2049300$ sein kann.
   Wählen wir die ganzen Zahlen von 1 bis 2023 und die Zahl $M = 2049300$, dann ist deren arithmetisches Mittel tatsächlich gleich 2024.
   Folglich ist der größte Wert, den M annehmen kann 2049300.

2. $M \geq 3036$
   Wir geben zunächst eine Möglichkeit der Wahl der 2024 Zahlen mit $M = 3036$ an und zeigen dann, dass $M \leq 3035$ nicht möglich ist.
   Wir wählen die Zahlen paarweise so, dass die Summe der Zahlen jedes Paares gleich $2 \cdot 2024 = 4048$ ist:
   $$4048 = 1012 + 3036 = 1013 + 3035 = \dots = 2022 + 2026 = 2023 + 2025\,,$$
   d.h. wir wählen die ganzen Zahlen von 1012 bis 3036 mit Ausnahme von 2024.
   Durch die Wahl der Zahlenpaare mit Summe $2 \cdot 2024$ ist das arithmetische Mittel aller gewählten Zahlen gleich 2024.

   Angenommen die größte der 2024 gewählten Zahlen ist 3035.
   Dann können die anderen gewählten Zahlen höchstens so groß sein wie $3034, 3033, \dots, (3035-$

2023). Die Summe aller 2024 gewählten Zahlen ist aleo höchstens

$$\begin{aligned}3035 + 3034 + 3033 + \dots + 1012 &= (3035 + 3034 + \dots + 1) - ((1011 + 1010 + \cdot + 1) \\ &= \frac{3035 \cdot 3036}{2} - \frac{1011 \cdot 1012}{2} = 4607130 - 511566 \\ &= 4095564\,.\end{aligned}$$

Der Mittelwert dieser 2024 Zahlen kann also höchstens $\frac{4095564}{2} = 2023,5 < 2024$ sein. Falls $M < 3035$ wäre, dann wäre der Mittelwert der 2024 gewählten Zahlen noch kleiner. Daher kann M nicht kleiner als 3036 sein.

Insgesamt haben wir damit die eingangs aufgestellte Behauptung bewiesen.

Bemerkung:

Um den minimalen Wert $M = 3036$ zu erhalten, müssen die 2024 Zahlen nicht unbedingt „symmetrisch" um die Zahl 2024 gewählt werden, also nicht unbedingt Paare mit Mittelwert 2024 bilden. Ein Beispiel anderer Art erhält man, wenn man in obigem Beispiel $a_1 = 1011$ und $a_{1012} = 2024$ setzt und alle anderen Zahlen gleich lässt.

Aufgabe 5

Mischa wählt aus den natürlichen Zahlen von 1 bis n fünf Zahlen aus.
Er berechnet alle Abstände zwischen jeweils zwei dieser fünf Zahlen. Dabei stellt er fest, dass keine zwei dieser Abstände gleich sind.
Bestimme das kleinste n, für das Mischa fünf Zahlen so ausgewählt haben kann.
Bemerkung: Mit „Abstand zwischen zwei Zahlen" ist der Betrag der Differenz dieser Zahlen gemeint.

Lösung:

Die kleinstmögliche natürliche Zahl n ist 12.

1.Beweis :

Für $n = 12$ ist dies möglich. Peter wählt die Zahlen $1, 2, 5, 10$ und 12 aus. Die zehn Unterschiede dieser fünf Zahlen sind tatsächlich alle verschieden:
$12 - 1 = 11$; $12 - 2 = 10$; $12 - 5 = 7$; $12 - 10 = 2$;
$10 - 1 = 9$; $10 - 2 = 8$; $10 - 5 = 5$;
$5 - 1 = 4$; $5 - 2 = 3$; $2 - 1 = 1$.
Nun wird gezeigt, dass es mit $n < 12$ nicht möglich ist.

1. Fall: $n \leq 10$
   Bei fünf verschiedenen Zahlen muss Mischa zehn Unterschiede berechnen $(10 = \frac{5 \cdot 4}{2})$. Wenn diese Unterschiede alle verschieden sein sollen, muss mindestens einer dieser Unterschiede mindestens 10 sein. Der größte Unterschied von zwei Zahlen, die kleiner oder gleich 10 sind, ist aber höchstens 9. Also ist dieser Fall unmöglich.

2. Fall: $n = 11$
   Wir führen auch hier einen Beweis durch Widerspruch. Angenommen, Mischa hat aus den Zahlen von 1 bis 11 fünf so ausgewählt, dass alle Unterschiede verschieden

sind. Dann muss er die Zahlen 1 und 11 ausgewählt haben Denn, falls er die 11 oder die 1 nicht ausgewählt hat, dann ergibt sich der Widerspruch wie bei Fall 1: Der größte Unterschied zweier ausgewählter Zahlen ist dann nämlich höchstens 9.
Er muss also 1 und 11 ausgewählt haben.
Wir zeigen nun, dass die Summe s aller Unterschiede der 5 Zahlen höchstens 54 betragen kann. Zunächst ist der Unterschied von 1, als der kleinsten Zahl und 11 als der größten Zahl $(11 - 1) = 10$.
Zwischen 1 und 11 hat Micha drei weitere Zahlen $1 < a < b < c < 11$ ausgewählt. Die sechs Unterschiede dieser Zahlen zu den Randzahlen 1 und 11 addieren sich dann zu 30:

$$(11 - a) + (a - 1) + (11 - b) + (b - 1) + (11 - c) + (c - 1) = 30$$

Die Summe der drei verbleibenden Unterschiede ist

$$(c - a) + (c - b) + (b - a) = 2 \cdot (c - a) \quad .$$

Da $2 \leq a$ und $c \leq 10$ gilt, ist sicher $(c - a) \leq 8$.
Allerdings ist $(c - a) = 8$ nicht möglich, denn dann muss $b = 2$ und $c = 10$ gelten, was einen Widerspruch zur Voraussetzung verschiedener Unterschiede darstellt, denn dann käme der Unterschied 1 doppelt vor: $2 - 1 = 1$ und $11 - 10 = 1$.
Es gilt also $(c - a) \leq 7$.
Für die Summe s aller Unterschiede der fünf Zahlen $1 < a < b < c < 11$ gilt also:

$$\begin{aligned} s =& (11 - 1) + (11 - a) + (a - 1) + (11 - b) + (b - 1) + (11 - c) \\ &+ (c - 1) + (c - a) + (c - b) + (b - a) = 10 + 30 + 2 \cdot (c - a) \leq 40 + 2 \cdot 7 = 54 \end{aligned}$$

Dies stellt aber einen Widerspruch dar, denn die Summe der 10 kleinsten Unterschiede ist bereits $1 + 2 + 3 + \ldots + 10 = 55$.
Es können also aus den $n = 11$ Zahlen keine fünf so wie gewünscht ausgewählt werden.

Da wir zu Beginn gezeigt haben, dass $n = 12$ tatsächlich möglich ist, haben wir gezeigt, dass $n = 12$ die kleinste mögliche Zahl ist.

2.Beweis :

Wir ordnen die fünf gewählten Zahlen der Größe nach und bezeichnen sie mit $1 \leq k < x < y < z < g \leq n$. Weiterhin seien $a = (x - k), b = (y - x), c = (z - y)$ und $d = (g - z)$ die Abstände direkt aufeinanderfolgender ausgewählter Zahlen.
Für minimales n ist $g = n$ und $k = 1$ und der Abstand zwischen k und g ist minimal. Falls $k > 1$ wäre, könnten wir alle gewählten Zahlen jeweils um 1 verkleinern, wobei die Abstände zweier Zahlen sich nicht ändern, am Ende aber die größte gewählte Zahl (und damit auch n) um 1 kleiner wäre.
Wir zeigen zuerst, dass der Abstand $(g - k)$ mindestens 10 sein muss und dann dass $g - k = 10$ nicht möglich ist.
Schließlich geben wir eine mögliche Wahl der fünf Zahlen mit $k = 1$ und $g = 12$ (also $g - k = 11$) an.

- $g - k \geq 10$.
Die Abstände a, b, c, d sind positiv, ganzzahlig und paarweise verschieden. Daher ist $a + b + c + d$ mindestens gleich 10.
Andererseits ist $a + b + c + d = (x - k) + (y - x) + (z - y) + (g - z) = g - k$, was unsere Behauptung $(g - k) \geq 10$ beweist.

- $g - k = 10$ ist nicht möglich.
Damit $(g-k) = 10$ angenommen wird, müssen die vier Abstände a, b, c, d tatsächlich aus der Menge $\{1; 2; 3; 4\}$ der vier kleinsten möglichen Abstände gewählt werden.
Wir stellen uns die vier Abstände nebeneinander aufgeschrieben vor (also $a; b; c; d$).
Dann ist die Summe direkt nebeneinander stehender Abstände wieder ein Abstand zwischen zwei der fünf gewählten Zahlen (z.B. $b+c = (y-x)+(z-y) = z-x$). Daher darf der Abstand 1 nicht direkt neben den Abständen 2 und 3 stehen, denn sonst gäbe es die Abstände $3 = 2 + 1$ bzw. $4 = 3 + 1$ doppelt.
Daher muss der Abstand 1 am Rand stehen (würde er an zweiter oder dritter Stelle stehen, dann hätte er zwei Nachbarn, von denen wenigstens einer 2 oder 3 sein müsste).
Benachbart zum Abstand 1 muss dann Abstand 4 stehen (2 und 3 sind ausgeschlossen).
Folglich gibt es aber den Abstand 5 doppelt - einmal als $5 = 1 + 4$ und einmal als $5 = 2 + 3$, denn wenn 1 am Rand steht und direkt neben der 1 die 4, dann sind die Abstände 2 und 3 ebenfalls benachbart.
So erkennen wir, dass der Abstand $g - k = 10$ nicht realisierbar ist.

- Der Abstand $g - K = 11$ ist möglich.
Wir wählen die Zahlen $k = 1, x = 4, y = 5, z = 10$ und $g = 12$. Dann folgt für die Abstände:
$11 = 12 - 1 = g - k$, $9 = 10 - 1 = z - k$, $8 = 12 - 4 = g - x$, $7 = 12 - 5 = g - y$,
$6 = 10 - 4 = z - x$, $5 = 10 - 5 = z - y$, $4 = 5 - 1 = y - k$, $3 = 4 - 1 = x - k$,
$2 = 12 - 10 = g - z$, $1 = 5 - 4 = y - x$.
Von den $10 = \frac{5 \cdot 4}{2}$ möglichen Abständen zwischen zwei der fünf gewählten Zahlen sind offensichtlich alle paarweise verschieden (alle Abstände von 1 bis 9 und der Abstand 11 treten auf).

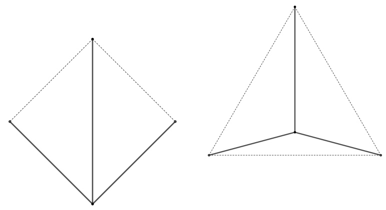
Damit ist gezeigt, dass n mindestens den Wert 12 annehmen muss und auch kann.

Variante (zum Ausschluss von $n = 11$):

Angenommen die kleinste Zahl ist 1 und die größte Zahl ist 11. Da der größte mögliche Abstand $10 = 11 - 1$ ist und es bei 5 Zahlen $\binom{5}{2} = 10$ verschiedene Abstände geben muss, kommt jeder Abstand von 1 bis 10 genau einmal vor. Insbesondere ist die Anzahl der ungeraden Abstände gleich 5.
Von den 5 ausgewählten Zahlen sei die Anzahl der ungeraden Zahlen u und die Anzahl der geraden Zahlen g. Die Anzahl der ungeraden Abstände zwischen den 5 Zahlen ist dann $u \cdot g$, da ein ungerader Abstand genau dann entsteht, wenn eine der beiden Zahlen gerade und die andere ungerade ist.
Da $u + g = 5$ ist, muss entweder u oder g gerade sein. Somit ist das Produkt $u \cdot g$ gerade und kann nicht 5 sein. Dies ist ein Widerspruch zur Annahme.

Aufgabe 6

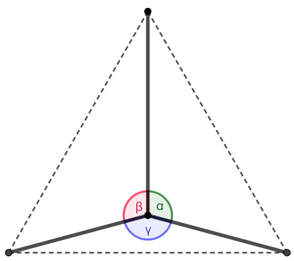
Drei Stäbe sind an einem gemeinsamen Punkt drehbar befestigt. Sie können so gedreht werden, dass ihre freien Enden zusammen mit dem gemeinsamen Punkt die Eckpunkte eines Quadrates bilden.
Sie können aber auch so gedreht werden, dass ihre freien Enden wie in der Abbildung die Eckpunkte eines gleichseitigen Dreiecks bilden.



Bestimme die Größen der drei Winkel, die die drei Stäbe dabei im gleichseitigen Dreieck einschließen.

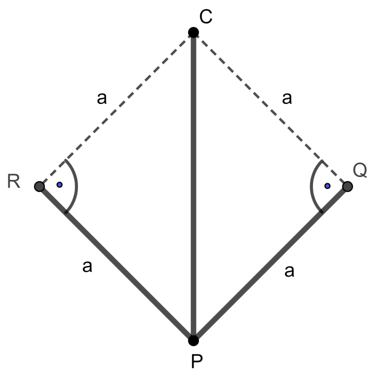
Lösung:

Die Weite der drei Winkel beträgt $\alpha = \beta = 105°$ und $\gamma = 150°$.



1.Beweis (durch Aufsetzen gleichseitiger Dreiecke):

Man geht aus von dem Quadrat in der linken Abbildung der Aufgabenstellung. Die Eckpunkte des Quadrats seien mit P, Q, C und R bezeichnet, die Seitenlänge des Quadrats sei a.
Auf den Quadratseiten $\overline{PQ}$ und $\overline{RP}$ wird jeweils ein gleichseitiges Dreieck nach außen errichtet (vgl. Abbildung). Der dritte Eckpunkt wird jeweils mit A bzw. B bezeichnet.

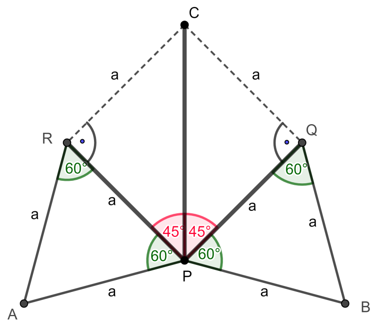


Dann ergibt sich nach Konstruktion:

$$\begin{aligned}\angle CQB &= \angle CQP + \angle PQB\\ &= 90° + 60°\\ &= 150°\end{aligned}$$

und

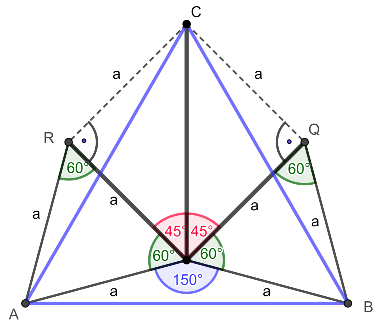
$$\begin{aligned}\angle BPC &= \angle BPQ + \angle QPC\\ &= 60° + 45°\\ &= 105°\end{aligned}$$



Analog gilt $\angle CPA = 105°$.

Es folgt

$$\begin{aligned}\angle APB &= 360° - \angle BPC - \angle CPA\\ &= 360° - 105° - 105°\\ &= 150°\end{aligned}$$

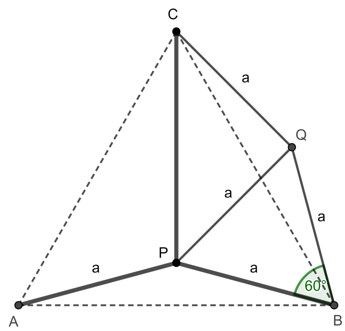


Somit sind die Dreiecke $\triangle BQC$ und $\triangle ABP$ nach dem Kongruenzsatz (SWS) kongruent: Es gilt

- $|\overline{AP}| = |\overline{CQ}| = a$,
- $|\overline{PB}| = |\overline{QB}| = a$ und
- $\angle APB = \angle CQB = 150°$.

Somit ist auch die dritte Seite in diesen Dreiecken gleich lang, d.h. $|\overline{AB}| = |\overline{BC}| = a$. Analog ist $|\overline{AB}| = |\overline{AC}| = a$.
Das Dreieck $\triangle ABC$ ist also gleichseitig. Das gleichseitige Dreieck, das durch die Drehung der Stäbe entsteht ist eindeutig: Bei einem kleineren Winkel $\angle APB$ würde die Strecke $\overline{AB}$ kürzer werden, die Strecken $\overline{AC}$ und $\overline{BC}$ dagegen länger, daher könnte kein gleichseitiges Dreieck mehr vorliegen. Analog bei einem größeren Winkel $\angle APB$. Folglich ist das Dreieck $\triangle ABC$ genau das gleichseitige Dreieck mit den verdrehten Stäben in der rechten Abbildung der Aufgabenstellung.
Es ergibt sich $\angle APB = 150°$, $\angle BPC = \angle CPA = 105°$. Das war zu beweisen.

2.Beweis (mit Drehung um den Punkt B):

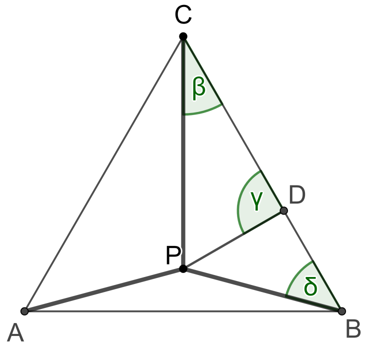


Man geht aus vom gleichseitigen Dreieck in der rechten Abbildung der Aufgabenstellung. Die Eckpunkte dieses Dreiecks werden mit A, B und C bezeichnet, der gemeinsame Drehpunkt mit P.
Man dreht das Dreieck $\triangle ABP$ um 60° um B im Uhrzeigersinn. Dann fällt A auf C, B bleibt fest und der Bildpunkt von P sei der Punkt $P' = Q$.
Insbesondere gilt $|\overline{BP}| = |\overline{BQ}| = a$. Außerdem ist aufgrund der Drehung um 60°: $\angle QBP = 60°$.

Somit hat des gleichschenklige Dreieck $\triangle PBQ$ den Innenwinkel 60°, muss also gleichseitig sein. Außerdem ist aufgrund der Drehung auch $|\overline{AP}| = |\overline{CQ}| = a$. Also ist das Dreieck $\triangle PQC$ gleichschenklig. Nach dem Kongruenzsatz (SSS) ist dieses Dreieck kongruent zum halben Quadrat in der linken Abbildung der Aufgabenstellung, denn $|\overline{PQ}| = |\overline{CQ}| = a$ ist so lang wie die Quadratseiten und $\overline{PC}$ist nach Aufgabenstellung so lang wie die Diagonale des Quadrats. Somit ist $\angle CQP = 90°$. Es folgt
$\angle APB = \angle CQB = \angle CQP + \angle PQB = 90° + 60° = 150°$
und
$\angle BPC = \angle BPQ + \angle QPC = 60° + 45° = 105°$.
Schließlich ergibt sich
$\angle CPA = 360° - \angle APB - \angle BPC = 360° - 150° - 105° = 105°$
Dies war zu zeigen.

3. Beweis (mit Satz des Pythagoras und Satz des Thales):

Man geht aus vom gleichseitigen Dreieck in der rechten Abbildung der Aufgabenstellung. Die Eckpunkte dieses Dreiecks werden wie im 2. Beweis mit A, B und C bezeichnet, der gemeinsame Drehpunkt mit P. Des weiteren zeichnen wir im Dreieck $\triangle BCP$ die Höhe auf der Seite $\overline{BC}$ mit dem Höhenfußpunkt D ein, d.h. $\angle CDP = \gamma = 90°$. Die Länge des kurzen Stabs sei mit a bezeichnet, d.h. $|\overline{AP}| = |\overline{BP}| = a$.

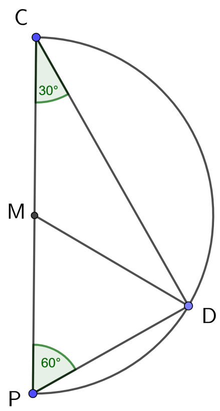


Da der lange Stab die Länge der Diagonale im Quadrat mit der Seitenlänge a ist, hat er die Länge $\sqrt{2}a$, also gilt $|\overline{PC}| = \sqrt{2}a$

Die Dreiecke $\triangle PBC$ und $\triangle PAC$ sind nach Kongruenzsatz (sss) zueinander kongruent (Es ist $|\overline{BC}| = |\overline{AC}|$, weil beide Seiten des gleichseitigen Dreiecks $\triangle ABC$ sind, Seite $\overline{PC}$ haben beide Dreiecke gemeinsam und $|\overline{AP}| = |\overline{PB}| = a$ ist die Länge der kurzen Stäbe). Daher gilt für die Winkel:

$$\angle CPA = \angle BPC \quad \text{und}$$
$$\angle PCB = \angle ACP = \frac{\angle ACB}{2} = \frac{60°}{2} = 30° \quad .$$

Wir betrachten das rechtwinklige Dreieck $\triangle PDC$. Es hat die Innenwinkel $\angle PCD = \beta = 30°$, $\angle CDP = \gamma = 90°$ und $\angle DPC = 180° - 30° - 90° = 60°$. Wir zeigen, dass $|\overline{PD}| = \frac{1}{2}|\overline{PC}|$.



Dazu nutzen wir den Satz des Thales. Sei M der Mittelpunkt der Seite $\overline{PD}$. Nach dem Satz des Thales liegt D auf dem Halbkreis über dem Durchmesser $\overline{PD}$. Daher ist $|\overline{MP}| = |\overline{MD}| = |\overline{MC}|$. Insbesondere ist das Dreieck $\triangle PDM$ gleichschenklig. Da zusätzlich $\angle DPM = 60°$ ist, ist das Dreieck $\triangle PDM$ sogar gleichseitig und folglich gilt tatsächlich

$$|\overline{PD}| = |\overline{PM}| = \frac{1}{2}|\overline{PC}| = \frac{1}{2}\sqrt{2}a \quad .$$

Nun betrachten wir das rechtwinklige Dreieck $\triangle PBD$ mit rechtem Winkel bei D. Mit dem Satz des Pythagoras berechnen wir die Länge der Seite $\overline{BD}$:

$$\begin{aligned} |\overline{PB}|^2 &= |\overline{PD}|^2 + |\overline{BD}|^2 \\ a^2 &= \left(\frac{1}{2}\sqrt{2}a\right)^2 + |\overline{BD}|^2 \\ \frac{1}{2}a^2 &= |\overline{BD}|^2 \\ \frac{1}{2}\sqrt{2}a &= |\overline{BD}| \quad . \end{aligned}$$

Also sind die Seiten $\overline{PD}$ und $\overline{BD}$ gleich lang und das Dreieck $\triangle PBD$ ist gleichschenklig. Für den Winkel $\delta = \angle DBP = \angle BPD$ folgt:

$$180° = 2 \cdot \delta + 90° \quad \Longleftrightarrow \quad \delta = 45° \, .$$

Nun folgt für die gesuchten Winkel:

$$\angle CPA = \angle BPC = \angle BPD + \angle DPC = 45^\circ + 60^\circ = 105^\circ$$
$$\angle APB = 360^\circ - \angle CPA - \angle BPC = 360^\circ - 2 \cdot 105^\circ = 150^\circ\,.$$

Variante(mit Sinussatz):

Wir betrachten das Dreieck $\triangle PBC$. Wie im 3. Beweis folgt $\angle PCB = \beta = 30^\circ$, $\left|\overline{PC}\right| = \sqrt{2}a$ und $\left|\overline{PB}\right| = a$. Mit dem Sinussatz folgt

$$\frac{\sin(\angle PCB)}{\left|\overline{PB}\right|} = \frac{\sin(\angle CBP)}{\left|\overline{PC}\right|}$$
$$\frac{\sin(30^\circ)}{a} = \frac{\sin(\angle CBP)}{\sqrt{2}a}$$
$$\sin(\angle CBP) = \frac{\sqrt{2}}{2}\,. \tag{1}$$

Da $\angle CBP$ kleiner als der Innenwinkel des gleichseitigen Dreiecks $\triangle ABC$ und damit auch kleiner als 90° ist, folgt mit (1) $\angle CBP = 45^\circ$.
Wegen der Innenwinkelsumme im Dreieck $\triangle PBC$ folgt

$$\angle BPC = 180^\circ - \angle CBP - \angle PCB = 180^\circ - 45^\circ - 30^\circ = 105^\circ\,.$$

Wegen der Kongruenz der Dreiecke $\triangle PBC$ und $\triangle PAC$ folgt wie im 3. Beweis $\angle CPA = \angle BPC = 105^\circ$.
Schließlich folgt im Vollwinkel um den Punkt P:

$$\angle APB = 360^\circ - \angle CPA - \angle BPC = 360^\circ - 2 \cdot 105^\circ = 150^\circ\,.$$

Bemerkung:

Es gibt noch eine weitere Möglichkeit, die Stäbe so zu drehen, dass ihre Enden die Ecken eines gleichseitigen Dreiecks bilden. Da hierbei aber der Drehpunkt, anders als in der Abbildung zur Aufgabe, außerhalb des Dreiecks liegt, führt dies zu keiner weiteren Lösung.