37. Landeswettbewerb Mathematik Baden-Württemberg

Lösungsbeispiele für die

Aufgaben der 2. Runde 2023/2024

2023

Aufgabe 1

Im Stellenwertsystem zur Basis b gilt: $\left((330)_b\right)^2 = \left((44)_b\right)^3$. Bestimme alle möglichen positiven ganzzahligen Werte von b.

Hinweis: Beispielsweise gilt $(201)_5 = 2\cdot 5^2 + 0\cdot 5^1 + 1\cdot 5^0$.

Lösung:

Der einzige mögliche Wert ist $b = 8$.

1. Beweis:

Damit die beiden Ausdrücke links und rechts des Gleichheitszeichens erlaubte Darstellungen im Stellenwertsystem zur Basis b sind, muss $b > 4$ sein. Die gegebene Gleichung ist dann äquivalent zu

$$\left(3\cdot b^2 + 3\cdot b\right)^2 = (4\cdot b + 4)^3 \iff 9\cdot b^2\cdot (b+1)^2 = 64\cdot (b+1)^3\,.$$

Weil $b+1 > 0$ ist, kann man hier durch $(b+1)^2$ teilen und erhält die äquivalente Gleichung

$$9\cdot b^2 = 64\cdot (b+1) \iff 9\cdot b^2 - 64\cdot b - 64 = 0 \iff (9b+8)\,(b-8) = 0.$$

Die letzte Gleichung ist genau dann erfüllt, wenn einer der beiden Faktoren $9b+8$ oder $b-8$ den Wert 0 hat, wenn also $b = -\frac{8}{9}$ oder $b = 8$ ist. Weil b positiv (und ganzzahlig) sein muss, bleibt nur $b = 8$ als Möglichkeit.
Tatsächlich sind im Stellenwertsystem zur Basis 8 die beiden Ausdrücke $(330)_8$ und $(44)_8$ erlaubte Darstellungen von Zahlen, denn alle Ziffern sind kleiner als 8 und es gilt

$$\left((330)_8\right)^2 = \left(3\cdot 8^2 + 3\cdot 8\right)^2 = 216^2 = \left(6^3\right)^2 = \left(6^2\right)^3 = 36^3 = (4\cdot 8 + 4)^3 = \left((44)_8\right)^3.$$

2. Beweis:

Im Stellenwertsystem zur Basis b kann man die gegebene Gleichung umformen:

$$\left(3\cdot (110)_b\right)^2 = \left(4\cdot (11)_b\right)^3 \iff 9\cdot \left((110)_b\right)^2 = 64\cdot \left((11)_b\right)^3.$$

Die Zahl $(110)_b$ ist wegen der letzten Ziffer 0 durch b teilbar. Daher ist die linke Seite der letzten Gleichung durch b^2 teilbar, und damit dann auch die rechte. Die Zahl $(11)_b$ auf der rechten Seite lässt beim Teilen durch b wegen der letzten Ziffer 1 den Rest 1; sie ist daher

teilerfremd zu b. Deswegen kann auch $((11)_b)^3$ keinen gemeinsamen Teiler mit b^2 haben (außer dem Teiler 1). Somit muss $64 = 8^2$ durch b^2 teilbar sein, also muss 8 durch b teilbar sein. Damit der Ausdruck $(44)_b$ eine erlaubte Darstellung einer Zahl im Stellenwertsystem zur Basis b ist, muss $b > 4$ sein. Es bleibt also nur $b = 8$.
Wie im 1. Beweis zeigt eine Probe, dass $b = 8$ wirklich Lösung der Aufgabe ist.

3. Beweis:

Damit der Ausdruck $(44)_b$ eine erlaubte Darstellung einer Zahl im Stellenwertsystem zur Basis b ist, muss $b > 4$ sein. Für die kleinsten möglichen Werte $b = 5, 6, \dots, 13$ zeigt die folgende Tabelle, dass genau $b = 8$ Lösung ist:

b	$(330)_b$	$((330)_b)^2$	$(44)_b$	$((44)_b)^3$
5	90	8100	24	13824
6	126	15876	30	27000
7	168	28224	32	32768
8	216	46656	36	46656
9	270	72900	40	64000
10	330	108900	44	85184
11	396	156816	48	110592
12	468	219024	52	140608
13	546	298116	56	175616

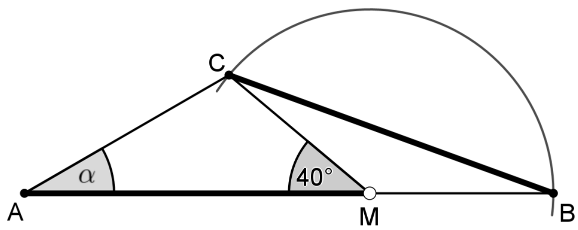
Weiter folgt für $b > 13$ aus der gegebenen Gleichung die folgende Abschätzung:

$$((300)_b)^2 < ((330)_b)^2 = ((44)_b)^3 < ((50)_b)^3 .$$

Dies bedeutet $(3b^2)^2 < (5b)^3$ bzw. $9b^4 < 125b^3 \iff b < \frac{125}{9} < 14$. Dies steht im Widerspruch zur Ganzzahligkeit von $b > 13$. Für $b > 13$ ist die gegebene Gleichung also nicht erfüllt.
Es bleibt $b = 8$ als einzige Lösung.

Aufgabe 2

In nebenstehender Figur gilt $\left|\overline{AM}\right| = \left|\overline{BC}\right|$. Bestimme die Größe des Winkels α.



Lösung:

Der Winkel α hat die Größe 30°.

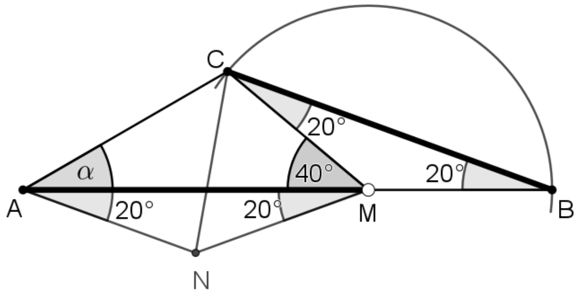
1. Beweis:

Zunächst ist auch das Dreieck MBC gleichschenklig, denn es hat die beiden Kreisbogenradien $\overline{MB}$ und $\overline{MC}$ als Seiten. Die Basiswinkel in diesem Dreieck haben nach Außenwinkelsatz die Größe $\frac{1}{2} \cdot 40° = 20°$.[1] Nun betrachtet man das Dreieck AMN, dessen

[1] Alternativ kann hier mit dem Winkel $\angle BMC = 180° - 40° = 140°$ und der Innenwinkelsumme im Dreieck MBC argumentiert werden: $\angle CBM + \angle BCM + \angle BMC = 180°$, also folgt $\angle CBM + \angle BCM = 2\angle CBM = 180° - 140° = 40° \iff \angle CBM = 20°$.

Innenwinkel bei A und M jeweils $20°$ groß sind und dessen Eckpunkt N nicht auf derselben Seite von AB wie C liegt.

Das Dreieck AMN stimmt dann mit dem Dreieck BCM in zwei Winkeln und der Länge der jeweils eingeschlossenen Seite $\overline{BC}$ bzw. $\overline{AM}$ überein. Die beiden Dreiecke sind also kongruent und es gilt $|\overline{NM}| = |\overline{CM}|$. Das Dreieck NMC ist also gleichschenklig. Weil zusätzlich $\angle CMN = 40° + 20° = 60°$ ist, ist das Dreieck NMC sogar gleichseitig und es folgt: $|\overline{CN}| = |\overline{NM}| = |\overline{AN}|$.



Das wiederum bedeutet, dass das Dreieck ANC gleichschenklig sein muss. Die beiden Basiswinkel $\angle NAC$ und $\angle ACN$ in diesem Dreieck haben die Größe $\alpha + 20°$. Schließlich kann man den gesuchten Winkel mit der Innenwinkelsumme im Dreieck AMC berechnen:

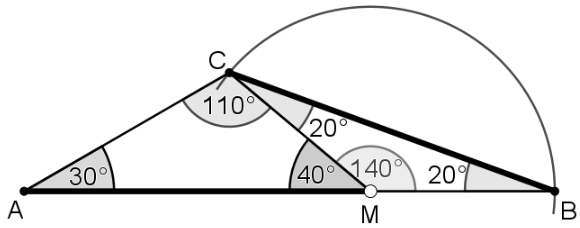
$$\begin{aligned}
180° &= \angle MAC + \angle CMA + \angle ACM \\
&= \angle MAC + \angle CMA + \angle ACN + \angle NCM \\
&= \alpha + 40° + (\alpha + 20°) + 60° \\
&= 2\alpha + 120°.
\end{aligned}$$

Hieraus folgt direkt $\alpha = \frac{1}{2}(180° - 120°) = 30°$.

2. Beweis:

Durch Strecken oder Stauchen der Figur kann man erreichen, dass die Strecke $\overline{CM}$ die Länge 1 besitzt. Dies wird im Folgenden so angenommen.[2] Wie im 1. Beweis erkennt man, dass das Dreieck MBC gleichschenklig mit Basiswinkeln der Größe $20°$ sein muss. Dann gibt es bis auf Kongruenz genau ein solches Dreieck MBC also auch genau eine mögliche Streckenlänge $|\overline{BC}|$. Mit dieser ist auch das Dreieck AMC eindeutig konstruierbar, denn von ihm sind die Längen der Strecken $\overline{CM}$, die Länge der Strecke $\overline{AM}$ und der von diesen Strecken eingeschlossene $40°$-Winkel gegeben. Somit kann es auch nur einen möglichen Winkel α geben. Es genügt daher nachzuweisen, dass die Figur mit einem Winkel der Größe $\alpha = 30°$ mit allen gewünschten Eigenschaften konstruierbar ist.

Zunächst ist ein Dreieck AMC mit den Innenwinkeln $30°$, $40°$ und $110°$ sowie der Seitenlänge $|\overline{CM}| = 1$ nach Kongruenzsatz wsw eindeutig konstruierbar. Dann ist auch ein Dreieck CMB mit den Innenwinkeln $140°$, $20°$ und $20°$ sowie der Seitenlänge $|\overline{CM}| = 1$ nach Kongruenzsatz wsw eindeutig konstruierbar. Weil $40° + 140° = 180°$ ist, liegen bei Orientierung der Dreiecke AMC und MBC im mathematisch positiven Sinn dann A, M und B in dieser Reihenfolge auf einer Geraden.



[2]Man sagt auch: „OBdA“ (Ohne Beschränkung der Allgemeinheit) wird angenommen, dass $|\overline{CM}| = 1$ ist.

In der so konstruierten Figur gilt für die Länge der Strecke $\overline{AM}$ nach Sinussatz im Dreieck AMC:

$$\frac{|\overline{AM}|}{|\overline{CM}|} = \frac{\sin(110^\circ)}{\sin(30^\circ)} \Rightarrow |\overline{AM}| = \frac{\sin(110^\circ)}{\sin(30^\circ)}$$

Für die Länge von $\overline{BC}$ folgt nach Sinussatz im Dreieck MBC:

$$\frac{|\overline{BC}|}{|\overline{CM}|} = \frac{\sin(140^\circ)}{\sin(20^\circ)} \Rightarrow |\overline{BC}| = \frac{\sin(140^\circ)}{\sin(20^\circ)}$$

Weil nun

$$\sin(110^\circ) \cdot \sin(20^\circ) = \cos(20^\circ) \cdot \sin(20^\circ) = \frac{1}{2} \cdot \sin(40^\circ) = \sin(30^\circ) \sin(140^\circ)$$

ist[3], folgt $\sin(110^\circ) \cdot \sin(20^\circ) = \sin(30^\circ) \sin(140^\circ)$ und hieraus nach Division durch $\sin(20^\circ) \sin(30^\circ)$ die Beziehung $|\overline{AM}| = |\overline{BC}|$. Damit ist alles gezeigt.

Aufgabe 3

Auf einem Tisch liegen n Steine, wobei n eine gerade Zahl ist. Die Spieler A und B nehmen abwechselnd Steine vom Tisch. Der Spieler, der am Zug ist, nimmt dabei jeweils entweder genau ein Drittel, genau die Hälfte oder genau zwei Drittel der Steine weg. Wenn dies nicht möglich ist, hat er verloren, und der andere Spieler ist Gewinner. Spieler A beginnt. Für welche Zahlen n kann Spieler A und für welche Zahlen n kann Spieler B den Sieg erzwingen?

Vorbemerkung:

Im Fall $n = 0$ ist offenbar stets ein Zug möglich und es ändert sich nichts an der Situation. Hier kann also weder A noch B erzwingen, dass der Gegner keinen Zug mehr ausführen kann und somit kann weder A noch B den Sieg erwzingen.
Im Folgenden wird $n > 0$ angenommen.
Jede Zahl $n > 0$ besitzt ausgehend von ihrer Primfaktorzerlegung eine eindeutige Darstellung der Form

$$n = 2^{z_n} \cdot 3^{d_n} \cdot n'$$

mit ganzen Zahlen $z_n \geq 0$, $d_n \geq 0$ und einer positiven ganzen Zahl n', die alle anderen Primfaktoren beinhaltet. Eine Zahl $n > 0$ nennen wir *Verlustzahl*, wenn sowohl z_n als auch d_n gerade sind, ansonsten nennen wir sie *Gewinnzahl*.

Lösung:

Spieler A kann den Sieg genau dann erzwingen, wenn n eine Gewinnzahl ist. Ansonsten kann Spieler B den Sieg erzwingen.

Beweis:

Es sei $m > 0$ die Anzahl der Steine, die zu irgendeinem Zeitpunkt vor dem Zug eines Spielers auf dem Tisch liegen. Man kann nun folgende Aussagen beweisen:

[3]Hier wird benutzt, dass $\sin(90^\circ + \varphi) = \cos(\varphi)$ und $\sin(2 \cdot \varphi) = 2\sin(\varphi)\cos(\varphi)$ gilt.

(I) Wenn m eine Gewinnzahl ist, dann kann der Spieler, der am Zug ist, einen erlaubten Zug so ausführen, dass danach die Anzahl der Steine eine Verlustzahl ist.

(II) Wenn m eine Verlustzahl ist, dann kann der Spieler, der am Zug ist, entweder keinen erlaubten Zug ausführen und verliert damit oder aber jeder erlaubte und mögliche Zug führt zu einer Anzahl an Steinen auf dem Tisch, die eine Gewinnzahl ist.

Wenn n nun eine Gewinnzahl ist verfolgt Spieler A folgende Strategie: Er erzeugt in seinem Zug eine Verlustzahl an Steinen. Wegen (I) kann A zu Beginn einen solchen Zug ausführen. Spieler B hat danach verloren oder aber kann wegen (II) nur Züge ausführen, bei denen eine Gewinnzahl an Steinen auf dem Tisch bleibt. Danach ist wieder A am Zug und kann wegen (I) seine Strategie durchführen usw. Da in jedem erlaubten Zug die Anzahl der Steine auf dem Tisch kleiner wird, gibt es in jedem Spiel einen letzten Zug. Nach diesem kann nur eine Verlustzahl an Steinen auf dem Tisch liegen. Den letzten Zug muss also Spieler A ausgeführt haben und B verliert.
Ist n eine Verlustzahl, dann hat Spieler A entweder sofort verloren, oder aber er muss wegen (II) eine Gewinnzahl an Steinen auf dem Tisch erzeugen. Dann ist Spieler B am Zug und kann wie oben für A beschrieben weiter spielen, bis er gewonnen hat.
Mit den folgenden Beweisen der Aussagen (I) und (II) ist dann alles gezeigt.

(I) Ist $m = 2^{z_m} \cdot 3^{d_m} \cdot m'$ die in der Vorbemerkung genannte Darstellung von m, dann muss, weil m Gewinnzahl ist, z_n oder d_m ungerade sein. Es ergeben sich damit drei Fälle, in denen der Spieler, der am Zug ist folgendermaßen ziehen kann:

z_m	d_m	auszuführender Zug	Steinzahl nach dem Zug
ungerade	gerade	m ist gerade, weil $z_m > 0$: nimm die Hälfte der Steine weg	$2^{z_m-1} \cdot 3^{d_m} \cdot m'$
gerade	ungerade	m ist durch 3 teilbar, weil $d_m > 0$: nimm zwei Drittel der Steine weg	$2^{z_m} \cdot 3^{d_m-1} \cdot m'$
ungerade	ungerade	m ist durch 3 teilbar, weil $d_m > 0$: nimm ein Drittel der Steine weg	$2^{z_m+1} \cdot 3^{d_m-1} \cdot m'$

Weil Vorgänger und Nachfolger einer ungeraden Zahl gerade sind, sind in jedem der drei Fälle die Exponenten der Primfaktoren 2 und 3 in den Steinzahlen nach dem Zug gerade. Die Steinzahl ist also eine Verlustzahl. Das war zu zeigen.

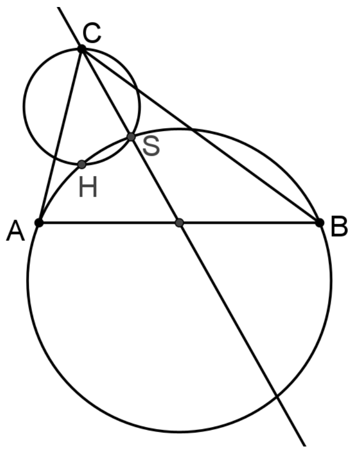
(II) Ist $m = 2^{z_m} \cdot 3^{d_m} \cdot m'$ die in der Vorbemerkung genannte Darstellung von m, dann müssen, weil m Verlustzahl ist, z_n und d_m gerade sein. Sind beide gleich 0, dann ist m weder durch 2 noch durch 3 teilbar. Man kann also keinen erlaubten Zug ausführen und hat verloren. Andernfalls sind genau die Zugvarianten in der folgenden Tabelle möglich:

Zugvariante	ausführbar falls	Steinzahl nach dem Zug
nimm die Hälfte	m gerade, also $z_m > 0$	$2^{z_m-1} \cdot 3^{d_m} \cdot m'$
nimm ein Drittel	m durch 3 teilbar, also $d_m > 0$	$2^{z_m+1} \cdot 3^{d_m-1} \cdot m'$
nimm zwei Drittel	m durch 3 teilbar, also $d_m > 0$	$2^{z_m} \cdot 3^{d_m-1} \cdot m'$

Weil Vorgänger und Nachfolger einer geraden Zahl ungerade sind, ist in jedem der drei Fälle der Exponent eines der Primfaktoren 2 oder 3 in den Steinzahlen nach dem Zug ungerade. Die Steinzahl ist also in jedem Fall eine Gewinnzahl. Das war zu zeigen.

Aufgabe 4

Im spitzwinkligen Dreieck ABC mit $|\overline{AC}| < |\overline{BC}|$ wird der Höhenschnittpunkt mit H bezeichnet. Der Umkreis des Dreiecks ABH und der Kreis über dem Durchmesser $\overline{CH}$ schneiden sich außer in H noch im Punkt S. Beweise: Die Gerade CS geht durch den Mittelpunkt der Seite $\overline{AB}$.

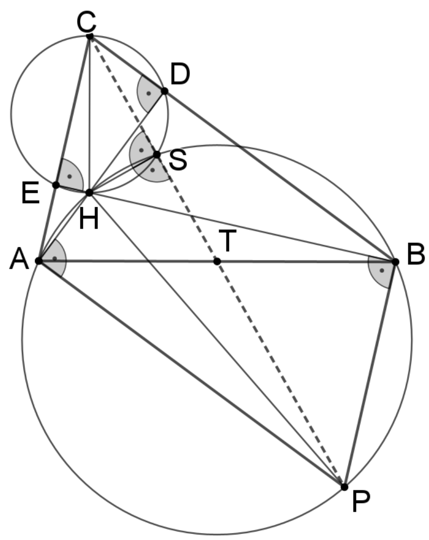


Vorbemerkung:

In einem spitzwinkligen Dreieck ABC liegt der Höhenschnittpunkt H im Inneren des Dreiecks. Da hier weiter $|\overline{AC}| < |\overline{BC}|$ gilt, schneiden sich der Umkreis (ABH) des Dreiecks ABH und der Kreis (CH) über dem Durchmesser $\overline{CH}$ in einem weiteren Punkt S, der auf dem Bogen BH des Kreises (ABH) zwischen den Punkten B und H und im Inneren des Dreiecks ABC liegt. Bezeichnen D und E die Schnittpunkte der Geraden AH und BH mit den Dreiecksseiten $\overline{BC}$ und $\overline{AC}$, sind $\overline{AD}$ und $\overline{BE}$ Höhen des Dreiecks ABC. Somit gilt $\angle CDH = 90°$ und $\angle HEC = 90°$. Der Kehrsatz zum Satz des Thales garantiert dann, dass die Höhenfußpunkte D und E auf dem Kreis (CH) liegen.

1. Beweis:

Der Schnittpunkt der Gerade CS mit der Seite $\overline{AB}$ werde mit T bezeichnet – und der zweite Schnittpunkt der Gerade CS mit dem Umkreis des Dreiecks ABH mit P. Da der Punkt S auf dem Kreis über dem Durchmesser $\overline{CH}$ liegt, hat der Winkel $\angle CSH$ aufgrund des Satzes des Thales die Größe 90°. Für seinen Nebenwinkel $\angle HSP$ gilt dann $\angle HSP = 180° - 90° = 90°$. Nun ergibt der Kehrsatz zum Satz des Thales mit $\angle HSP = 90°$, dass die Sehne $\overline{HP}$ ein Durchmesser des Umkreises des Dreiecks ABH ist. Damit betragen die Winkel $\angle PAH$ und $\angle HBP$ – wieder mit dem Satz des Thales – ebenfalls 90°.

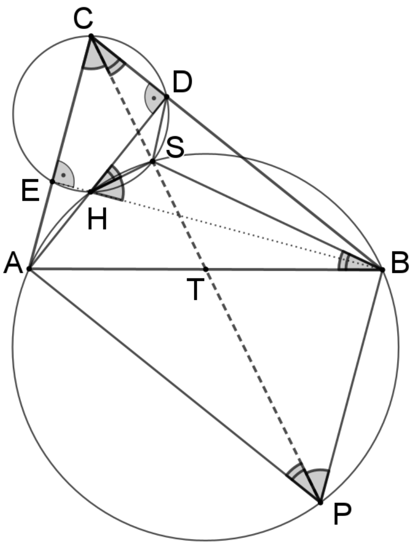


Da es sich bei AD und BE um Höhen des Dreiecks ABC handelt, gilt dann weiter $\angle CDA = 90° = \angle PAD$ und $\angle BEC = 90° = \angle EBP$. Mit dem Kehrsatz zum Wechselwinkelsatz sind daher die Strecken $\overline{BC}$ und $\overline{PA}$ parallel – wie auch die Strecken $\overline{AC}$ und $\overline{PB}$. Das Viereck $APBC$ ist also ein Parallelogramm – in dem sich die Diagonalen (hier: $\overline{AB}$

und $\overline{PC}$) bekanntermaßen halbieren. Bei T handelt es sich also um den Mittelpunkt der Strecke $\overline{AB}$.

Variante:

Bei den Winkeln $\angle BPS$ und $\angle BHS$ handelt es sich um Umfangswinkel des Umkreises (ABH) über der Kreissehne $\overline{BS}$. Da die Punkte P und H auf dem Bogen SB liegen, folgt nach dem Umfangswinkelsatz: $\angle BPS = \angle BHS$. Im Sehnenviereck $EHSC$ ergänzen sich gegenüberliegende Winkel zu $180°$. Da der Winkel $\angle BHS$ Außenwinkel zu diesem Sehenenviereck beim Punkt H ist, folgt: $\angle ECS = 180° - \angle SHE = \angle BHS$ – und somit insgesamt $\angle ACP = \angle BPC$. Aufgrund des Kehrsatzes zum Wechselwinkelsatz sind somit die Strecken $\overline{AC}$ und $\overline{PB}$ parallel. Die Punkte P und B liegen auf dem Bogen AS des Kreises (ABH). Mit dem Umfangswinkelsatz sind die Umfangswinkel $\angle SPA$ und $\angle SBA$ über der Kreissehne $\overline{AS}$ gleich groß.



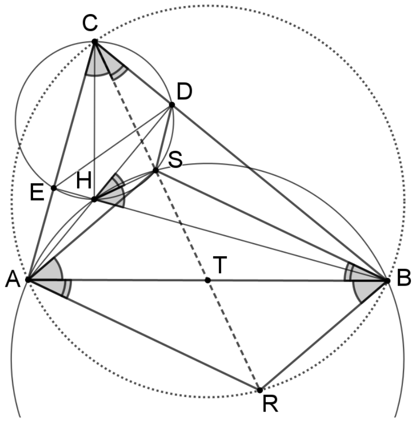
Weiter gilt für den Außenwinkel $\angle SHD$ des Sehnenvierecks $ABSH$ beim Punkt H: $\angle SHD = 180° - \angle AHS = \angle SBA$. Da es sich schließlich bei den Winkeln $\angle SHD$ und $\angle SCD$ um Umfangswinkel auf dem Bogen DS des Kreises über dem Durchmesser $\overline{CH}$ handelt, folgt mit dem Umfangswinkelsatz insgesamt: $\angle SCD = \angle SHD = \angle SBA = \angle SPA$. Mit der Gleichheit der Wechselwinkel $\angle PCB$ und $\angle CPA$ folgt, dass auch die Strecken $\overline{AP}$ und $\overline{CB}$ parallel sind. Das Viereck $APBC$ ist also ein Parallelogramm – in dem sich die Diagonalen halbieren.

2. Beweis:

Neben den bereits definierten Punkten D, E und T sei R der zweite Schnittpunkt der Gerade CS mit dem Umkreis (ABC) des Dreiecks ABC.

Der Umfangswinkelsatz zu den Punkten A und C auf dem Bogen BR über der Sehne in $\overline{RB}$ des Kreises (ABC) ergibt $\angle RAB = \angle RCB$. Analog sind die Umfangswinkel $\angle SHD$ und $\angle SCD$ über der Sehne $\overline{SD}$ des Kreises (CH) gleich groß.

Weiter gilt wie in der Variante des 1. Beweises für den Außenwinkel $\angle SHD$ des Sehnenvierecks $ABSH$ beim Punkt H: $\angle SHD = 180° - \angle AHS = \angle SBA$.



Insgesamt sind damit die Winkel $\angle RAB$ und $\angle SBA$ gleich groß: $\angle RAB = \angle RCB = \angle SHD = \angle SBA$ – und damit die Strecken $\overline{AR}$ und $\overline{BS}$ parallel.
Für den Außenwinkel $\angle BHS$ des Sehnenvierecks $EHSC$ beim Punkt H gilt: $\angle BHS = 180° - \angle SHE = \angle ECS$. Weiter gilt mit dem Umfangswinkelsatz $\angle ABR = \angle ACR$ (im Kreis (ABC) über der Sehne $\overline{AR}$) und $\angle BAS = \angle BHS$ (im Kreis (ABH) über der Seh-

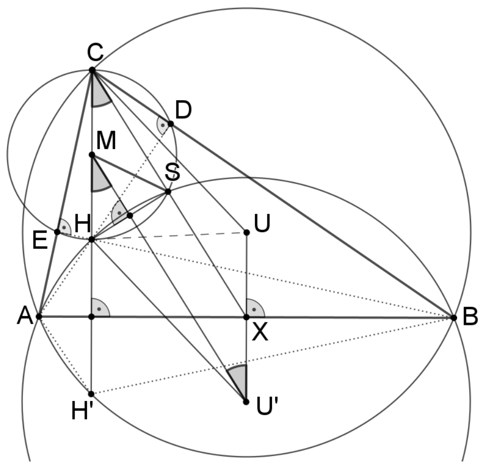
ne $\overline{BS}$). Insgesamt ergibt sich $\angle ABR = \angle ACR = \angle BHS = \angle BAS$ – und damit sind die Strecken $\overline{BR}$ und $\overline{AS}$ parallel. Das Viereck $ARBS$ ist also ein Parallelogramm, in dem sich die Diagonalen halbieren.

Bemerkung:

In diesem Beweis – wie auch in der Variante des 1. Beweises – geht nicht ein, dass H der Höhenschnittpunkt des Dreiecks ABC ist. Die Aussage der Aufgabe gilt tatsächlich allgemeiner.

3. Beweis:

H' sei der Spiegelpunkt des Höhenschnittpunkts H bezüglich der Gerade AB. H' liegt auf dem Umkreis (ABC) des Dreiecks ABC: Da die Dreiecke ABH und $AH'B$ spiegelsymmetrisch bezüglich AB sind, gilt $\angle BH'A = \angle AHB$. Weiter sind $\angle AHB$ und $\angle DHE$ Scheitelwinkel und $EHDC$ ist ein Sehnenviereck. Daraus folgt $\angle AHB = \angle DHE = 180° - \angle ECD$, und somit insgesamt $\angle BH'A + \angle ACB = 180°$



Die Umkreise der Dreiecke ABH und $AH'B$ sind symmetrisch bezüglich AB und es gilt $(AH'B) = (ABC)$. Daher sind die Umkreise (ABC) und (ABH) kongruent und besitzen den gleichen Radius R.
Ihre Mittelpunkte werden im Folgenden mit U und U' bezeichnet. Da UU' senkrecht auf der Spiegelgeraden AB steht, gilt $UU' \parallel CH$. Nun folgt mit dem SsW-Kongruenzsatz, dass die Dreiecke HUC und $U'UH$ kongruent sind: Sie stimmen wegen $UU' \parallel CH$ in den Wechsenwinkeln $\angle UHC$ und $\angle HUU'$ überein, sie teilen sich die Seite $\overline{HU}$ und es gilt $|\overline{U'H}| = R = |\overline{UC}|$. (Da H im Inneren des Dreiecks ABC liegt, gilt auch $|\overline{UC}| = R > |\overline{HU}|$.) Aus der Kongruenz der dieser Dreiecke HUC und $U'UH$ folgt $|\overline{CH}| = |\overline{UU'}|$. M sei nun der Mittelpunkt der Strecke $\overline{CH}$ und damit Mittelpunkt des Kreises (CH) über dem Durchmesser $\overline{CH}$ – und X sei der Schnittpunkt der Gerade CS mit der Strecke $\overline{UU'}$. Die Punkte H und S sind als Schnittpunkte der Kreise (CH) und (ABH) symmetrisch bezüglich der Geraden $U'M$ durch ihre Mittelpunkte. Im gleichschenkligen Dreieck HSM halbiert die Mittelsenkrechte MU' den Winkel $\angle HMS$. Mit dem Mittelpunktswinkelsatz zum Umfangswinkel $\angle HCS$ gilt daher: $\angle HCS = \frac{1}{2}\angle HMS = \angle HMU'$. Somit gilt neben $CM \parallel XU'$ auch $CX \parallel MU'$. $MU'XC$ ist also ein Parallelogramm und damit gilt: $|\overline{XU'}| = |\overline{CM}| = \frac{1}{2}|\overline{CH}| = \frac{1}{2}|\overline{UU'}|$. X ist also der Mittelpunkt der Strecke $\overline{UU'}$, der mit dem Mittelpunkt der Seite $\overline{AB}$ übereinstimmt.