Landeswettbewerb Mathematik
Baden-Württemberg
Musterlösungen 1. Runde 2010/2011

Aufgabe 1

Sonja hat neun Karten, auf denen die neun kleinsten zweistelligen Primzahlen stehen. Sie will diese Karten so in eine Reihe legen, dass sich die Zahlen auf zwei nebeneinander liegenden Karten immer um eine Potenz der Zahl 2 unterscheiden.

Wie viele Möglichkeiten hat Sonja, ihre Karten anzuordnen?

Lösung:

Sonja hat die folgenden vier Möglichkeiten:
1) 41 – 37 – 29 – 31 – 23 – 19 – 11 – 13 – 17
2) 41 – 37 – 29 – 31 – 23 – 19 – 17 – 13 – 11
3) 11 – 13 – 17 – 19 – 23 – 31 – 29 – 37 – 41
4) 17 – 13 – 11 – 19 – 23 – 31 – 29 – 37 – 41

Beweisvorschlag:

Die neun kleinsten zweistelligen Primzahlen sind:
11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37, 41.

In der folgenden Tabelle sind die möglichen Differenzen zwischen zwei der neun Zahlen zusammengestellt:

	11	**13**	**17**	**19**	**23**	**29**	**31**	**37**	**41**
11	-	*2*	*6*	*8*	*12*	*18*	*20*	*26*	*30*
13	*2*	-	*4*	*6*	*10*	*16*	*18*	*24*	*28*
17	*6*	*4*	-	*2*	*6*	*12*	*14*	*20*	*24*
19	*8*	*6*	*2*	-	*4*	*10*	*12*	*18*	*22*
23	*12*	*10*	*6*	*4*	-	*6*	*8*	*14*	*18*
29	*18*	*16*	*12*	*10*	*6*	-	*2*	*8*	*12*
31	*20*	*18*	*14*	*12*	*8*	*2*	-	*6*	*10*
37	*26*	*24*	*20*	*18*	*14*	*8*	*6*	-	*4*
41	*30*	*28*	*24*	*22*	*18*	*12*	*10*	*4*	-

Die vorkommenden Zweierpotenzen sind $2 = 2^1$, $4 = 2^2$, $8 = 2^3$, $16 = 2^4$.
Die Zweierpotenzen sind in der Tabelle farbig markiert.

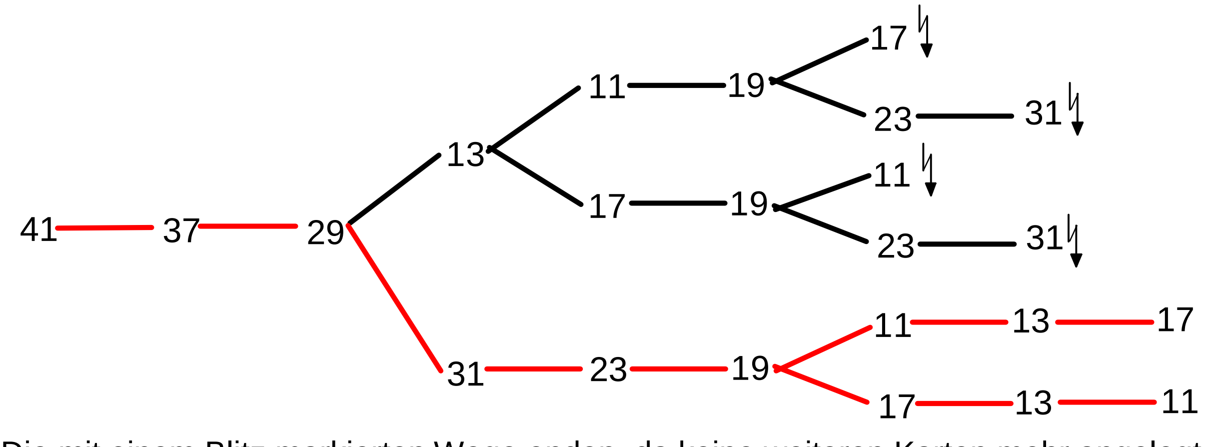
Man erkennt, dass in der Zeile zur 41 nur ein Feld markiert ist, die 41 also hat nur mit 37 eine Differenz, die eine Zweierpotenz ist. Also kann die Karte mit der 41 keine zwei Nachbarkarten haben, sie muss entweder am Anfang oder am Ende der Kartenreihe liegen. Da man die Karten ja auch umgekehrt anordnen kann, nehmen wir an, die 41 steht auf der ersten Karte. Dann muss, wie eben beobachtet, die 37 auf der zweiten Karte stehen.
In der Zeile zur Zahl 37 sind aber nur zwei Felder markiert, außer mit der 41 hat 37 nur zur 29 eine Zweierpotenz als Differenz. Auf der dritten Karte muss also 29 stehen.
In der Zeile mit der Zahl 29 sind nun drei Felder markiert: Außer mit 37 hat 29 auch mit 31 und mit 13 eine Differenz, die eine Zweierpotenz ist. Es gibt also für die vierte Karte der Reihe zwei Fälle:

Fall 1: Auf der vierten Karte steht die 13.
Aus der Zeile zur Zahl 13 erkennt man, dass dann auf der fünften Karte 11 oder 17 folgen muss.
Fall 1a: Auf der fünften Karte steht die 11.
Außer mit 13 hat die 11 nur mit 19 eine Zweierpotenz als Differenz. Also muss auf der sechsten Karte die 19 folgen. Aber aus der Zeile zur 17 erkennt man, dass die 17 nur neben 13 und 19 liegen kann. Auf der siebten Karte muss also die 17 stehen, da man diese Karte sonst nicht mehr anlegen könnte. Damit endet aber nun die Kartenreihe schon, denn man kann an die 17 keine weitere Karte mehr anlegen, da sowohl 13 als auch 19 schon verbraucht sind.
Fall 1b: Auf der fünften Karte steht die 17.
Dieser Fall ist analog zum Fall 1a, nur die Rolle der 11 und 17 sind vertauscht, da diese beiden Karten gleiche Nachbarn haben müssen.
Insgesamt ist also Fall 1 nicht möglich.

Fall 2: Auf der vierten Karte steht die 31.
Aus der Zeile zur 31 erkennt man, dass dann auf der fünften Karte die 23 folgen muss.
Auch die sechste Karte ist nun eindeutig: Die 23 hat nur noch mit der 19 eine Zweierpotenz als Differenz, es muss also die 19 folgen.
Auf der siebten Karte kann nun entweder 11 oder 17 stehen. Wenn auf der siebten Karte 11 steht, so bleibt für die achte Karte nur die 13, für die neunte Karte nur die 17. Das ist Lösung 1). Wenn auf der siebten Karte 17 steht, so muss nun die 13 und dann die 11 folgen. Das ist Lösung 2).

Die Lösungen 3) und 4) entstehen aus 1) und 2) nur durch Umkehrung der Kartenreihenfolge, es sind keine wirklich neuen Lösungen. Mehr Möglichkeiten gibt es nicht.

Mit dem folgenden Baumdiagramm kann man alle Fälle darstellen:



Die mit einem Blitz markierten Wege enden, da keine weiteren Karten mehr angelegt werden können. Nur bei den rot markierten Wegen, werden alle neun Karten untergebracht.

Aufgabe 2

Kleine Holzquader, die alle 10 cm lang, 9 cm breit und 7 cm hoch sind, sollen in eine quaderförmige Kiste mit den Innenmaßen 50 cm, 30 cm und 28 cm gepackt werden.

Bestimme die größtmögliche Anzahl an Holzquadern, die in die Kiste passen, und gib eine Möglichkeit an, wie man sie in die Kiste packen kann.

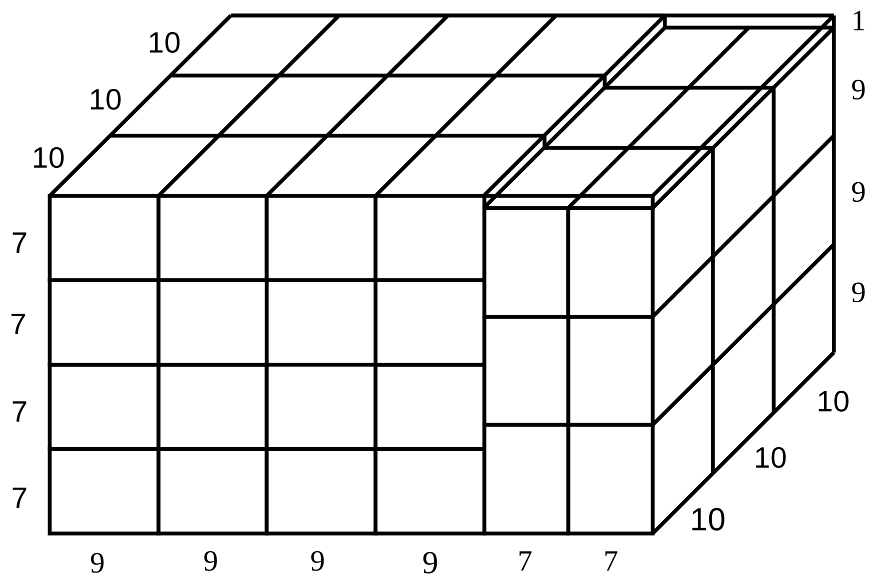
Lösung:

Die größtmögliche Anzahl von Holzquadern, die in die Kiste passen, ist 66.

Beweisvorschlag:

Das Volumen der Kiste ist 50 cm · 30 cm · 28 cm = 42 000 cm^3. Ein einzelner Holzquader hat das Volumen 10 cm · 9 cm · 7 cm = 630 cm^3.
Nun gilt für das Gesamtvolumen: 42000 cm^3 = 66 · 630 cm^3 + 420 cm^3.
Diese Rechnung zeigt, dass mehr als 66 Holzquader sicher nicht in die Kiste passen.

Jetzt weisen wir nach, dass man 66 Holzquader tatsächlich unterbringen kann. Eine mögliche Stapelung von 66 Holzquadern in der Kiste zeigt die folgende Abbildung:



Dabei liegen im linken Teil des Quaders wie abgebildet 3·4·4 = 48 Quader und füllen diesen linken Teil vollständig aus. Der rechte Teil des Quaders mit den Abmessungen 14cm, 30cm und 28cm lässt sich mit 2·3·3 = 18 Quadern so ausfüllen, dass nur ein Restquader mit den Abmessungen 14cm, 30cm und 1cm übrig bleibt.

Damit ist eine Packung mit 48+18 = 66 Quadern gegeben.

Aufgabe 3

Gegeben sind fünf verschiedene natürliche Zahlen. Bildet man alle möglichen Summen von jeweils zwei dieser Zahlen, so erhält man genau sieben verschiedene Werte. Zeige, dass die Summe aller fünf Zahlen durch 5 teilbar ist.

Beispiele:

a) Die fünf Zahlen sind 2, 5, 7, 8, 10. Dann ergeben sich die „Paarsummen" 7,9,10,12,13,15,17,18. Das sind acht verschiedene Werte, die Voraussetzung der Aufgabe ist also nicht erfüllt.
b) Die fünf Zahlen sind 2, 5, 8, 11, 14. Dann ergeben sich die „Paarsummen" 7,10,13,16,19,22,25. Das sind genau sieben verschiedene Werte, die Voraussetzung der Aufgabe ist also erfüllt. In der Tat ist die Summe 40 der fünf Zahlen durch 5 teilbar.

1. Beweisvorschlag:

Wir bezeichnen die fünf verschiedenen natürlichen Zahlen mit a,b,c,d,e, wobei $a < b < c < d < e$ gelten soll.
Die vier Summen, die mit der kleinsten Zahl a gebildet werden, müssen alle verschieden sein, da ja die zweiten Summanden verschieden sind:

$$a+b < a+c < a+d < a+e.$$

Drei weitere Summen ergeben sich mit der größten Zahl e:

$$b+e < c+e < d+e.$$

Da bereits die größte Zahl der oberen Reihe kleiner ist als die kleinste Zahl der unteren Reihe haben wir insgesamt schon sieben verschiedene Summen:

$$a+b < a+c < a+d < a+e < b+e < c+e < d+e. \quad (*)$$

Mehr als diese sieben Summen mit zwei Summanden darf es nach Aufgabenstellung nicht geben. Die drei übrigen Summen, die nur mittlere Zahlen enthalten, also b+c, b+d und c+d müssen mit einer dieser sieben Summen identisch sein. Dabei ist

$$b+c < b+d < c+d. \quad (**)$$

Die kleinste dieser drei Zahlen ist größer als a+c, die größte ist kleiner als c+e.
Vergleicht man die drei Zahlen in der Reihe (**) mit den sieben Zahlen in der Reihe (*), so können die drei Zahlen aus (**) also nur mit den mittleren drei Zahlen der Reihe (*) übereinstimmen. Es ergeben sich folglich die drei Gleichungen:

$$b+c = a+d \qquad (1)$$
$$b+d = a+e \qquad (2)$$
$$c+d = b+e \qquad (3)$$

Löst man die Gleichung (1) nach b auf, so ergibt sich $b = a+d-c$. Eingesetzt in (3) ergibt sich daraus $c+d = a+d-c+e$ oder

$$a+e = 2c \qquad (4)$$

Die Summe der fünf Zahlen ist nun nach Umordnung und wegen (2):

$$a+b+c+d+e = c+(b+d)+(a+e) = c + 2(a+e).$$

Setzt man (4) in diese letzte Gleichung ein, so ergibt sich

$$a+b+c+d+e = c + 2 \cdot 2c = 5c.$$

Somit ist die Summe der fünf Zahlen das Fünffache der mittleren Zahl c, also durch 5 teilbar.

Variante dieses Beweisvorschlags:

Die Gleichungen (1), (2) und (3) bilden ein lineares Gleichungssystem:

$$\begin{aligned} -a+b+c-d\phantom{{}+d-e} &= 0 \quad (1') \\ -a+b\phantom{{}+c}+d-e &= 0 \quad (2') \\ -b+c+d-e &= 0 \quad (3') \end{aligned}$$

Dieses kann man wie üblich in Stufenform bringen: Subtrahiert man Gleichung (1') von Gleichung (2'), so ergibt sich:

$$\begin{aligned} -a+b+c-d\phantom{{}-e} &= 0 \quad (1') \\ -b+c+d-e &= 0 \quad (3') \\ -c+2d-e &= 0 \quad (2')-(1') \end{aligned}$$

Aus der letzten Gleichung ergibt sich dann c = 2d-e. Eingesetzt in (3') folgt dann
b = c+d-e = (2d-e)+d-e = 3d-2e. Eingesetzt in (1') ergibt sich schließlich
a = b+c-d = (3d-2e)+(2d-e)-d = 4d-3e. Somit ergibt sich für die Summe der fünf Zahlen:

$$a+b+c+d+e = (4d-3e)+(3d-2e)+(2d-e)+d+e = 10d-5e = 5\cdot(2d-e) = 5c$$

Somit ist die Summe durch 5 teilbar.

2. Beweisvorschlag:

Wir bezeichnen die fünf verschiedenen natürlichen Zahlen mit a,b,c,d,e, wobei
a < b < c < d < e gelten soll.
Dann gilt auch: a+b < a+c < b+c < b+d < c+d < c+e < d+e.

Da dies also schon sieben verschiedene Summenwerte sind, müssen die übrigen drei Paarsummen a+d, a+e und b+e jeweils mit einem dieser sieben Werte übereinstimmen.

Wegen a+c < a+d < b+d muss also a+d = b+c (1) sein und weil b+d < b+e < c+e ist, ist b+e = c+d (2).

Schließlich ist noch a+d < a+e < b+e; daher muss a+e = b+d (3) sein.

Nun folgt der Reihe nach aus den Gleichungen (1), (3) und (2):

$$d-c = b-a = e-d = c-b.$$

Das bedeutet aber, dass benachbarte Zahlen in der Folge unserer fünf Zahlen jeweils denselben Abstand haben – es handelt sich also um eine arithmetische Zahlenfolge. Wir schreiben k für den konstanten Abstand benachbarter Zahlen. Es ist also b = a+k,
c = b+k = a+2k, d = a+3k, e = a+4k.

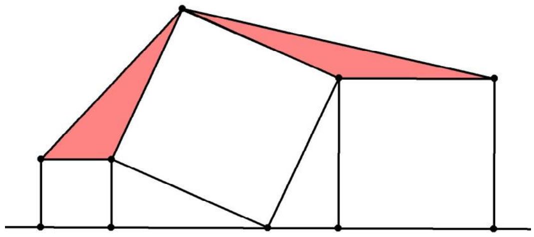
Somit gilt nun a+b+c+d+e = a+(a+k)+(a+2k)+(a+3k)+(a+4k) = 5(a+2k).

Die Summe der fünf Zahlen ist also durch 5 teilbar.

Aufgabe 4

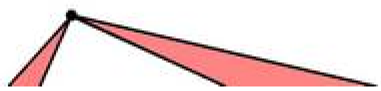
Drei Quadrate sind wie in der Abbildung angeordnet.

Zeige, dass die Flächeninhalte der beiden markierten Dreiecke gleich groß sind.

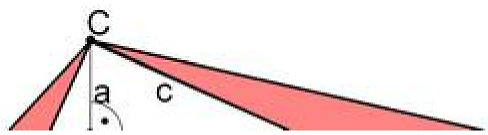


1. Beweisvorschlag:

Wir verwenden die Bezeichnungen, die in der Abbildung rechts dargestellt sind. Insbesondere seien a, b und c die Seitenlängen der drei Quadrate. A_1 und A_2 sind Eckpunkte des linken, B_1 und B_2 sind Eckpunkte des rechten Quadrats. Dann stehen A_1A_2 und B_1B_2 senkrecht auf der Geraden durch A_1 und B_1, der gemeinsamen Grundlinie der Quadrate. Das mittlere Quadrat berührt diese Grundlinie im Punkt X.



Sei nun C der gemeinsame Punkt der beiden markierten Dreiecke. Von C aus wird Senkrechte zur Grundlinie A_1B_1 gezeichnet, sie schneidet die Grundlinie in F. CF ist also parallel zu A_1A_2 und zu B_1B_2. Die Parallele zu A_1B_1 durch B_2 schneidet CF in Z, die Parallele zu A_1B_1 durch A_2 schneidet CF in Y (s. Abb. rechts).



Das rechtwinklige Dreieck ZB_2C entsteht dann aus A_1XA_2 durch eine Parallelverschiebung, da entsprechende Seiten parallel sind und die Hypotenuse gleich lang ist. Ebenso geht XB_1B_2 durch Parallelverschiebung in A_2YC über.

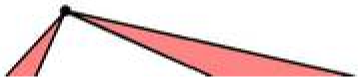
Das linke markierte Dreieck hat die Grundseite A_2A_3 mit Länge a, die Höhe ist die Strecke CY mit Länge $\overline{CY} = \overline{B_1B_2} = b$. Somit ist der Flächeninhalt des linken Dreiecks $\frac{a \cdot b}{2}$.
Das rechte markierte Dreieck hat die Grundseite B_2B_3 mit Länge b, die Höhe ist die Strecke CZ mit Länge $\overline{CZ} = \overline{A_1A_2} = a$. Somit ist der Flächeninhalt des rechten Dreiecks ebenfalls $\frac{a \cdot b}{2}$.

Die beiden markierten Dreiecke haben also denselben Flächeninhalt.

2. Beweisvorschlag:

Wir verwenden wieder dieselben Bezeichnungen wie im 1. Beweisvorschlag.

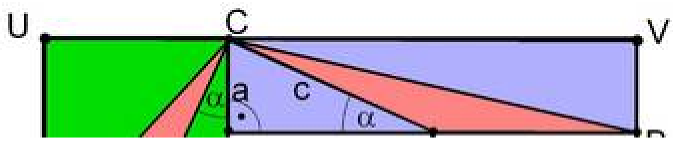
Behauptung: *Die Dreiecke B_1B_2X und A_1XA_2 sind kongruent.*



Beweis der Behauptung: Sei $\alpha = \measuredangle B_1B_2X$. Dann folgt aus der Winkelsumme im Dreieck B_1B_2X: $\measuredangle B_1XB_2 = 90° - \alpha$. Aus $\measuredangle B_2XA_2 = 90°$ und $\measuredangle B_1XA_1 = 180°$ folgt
$\measuredangle A_2XA_1 = \measuredangle B_1XA_1 - (\measuredangle B_1XB_2 + \measuredangle B_2XA_2) = 180° - ((90° - \alpha) + 90°) = \alpha$.

Somit stimmen die Dreiecke B_1B_2X und A_1XA_2 in zwei Winkeln (rechter Winkel und α), sowie in der Seite c überein. Nach dem Kongruenzsatz SWW sind die beiden Dreiecke kongruent und die Behauptung ist bewiesen.

Wir ergänzen das linke markierte Dreieck A_3A_2C wie in der Abbildung zu einem Rechteck A_3YCU.
Dabei entsteht das rechtwinklige Dreieck A_2YC aus XB_1B_2 durch eine Parallelverschiebung, da entsprechende Seiten parallel sind und die Hypotenuse gleich lang ist.



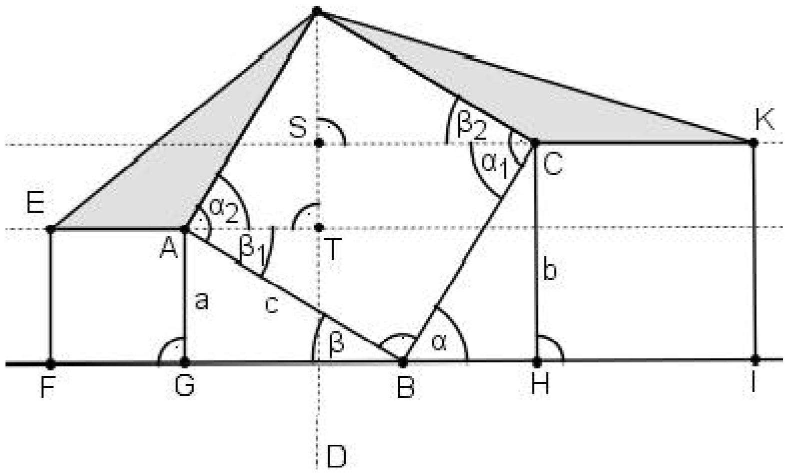
Somit hat die Rechteckseite CY die Länge $\overline{CY} = \overline{B_1B_2} = b$. Die Rechteckseite A_3Y hat die Länge $\overline{A_3Y} = \overline{A_3A_2} + \overline{A_2Y} = a + \overline{XB_1} = 2a$. Die Gleichheit $\overline{XB_1} = a$ folgt dabei aus der in der obigen Behauptung bewiesenen Kongruenz der Dreiecke B_1B_2X und A_1XA_2.
Damit hat das Rechteck A_3YCU den Flächeninhalt $F(A_3YCU) = 2a \cdot b$.

Ebenso ergänzen wir das rechte markierte Dreieck B_2B_3C zu einem Rechteck ZB_3VC.
Dabei entsteht das rechtwinklige Teildreieck ZB_2C des Rechtecks aus A_1XA_2 durch eine Parallelverschiebung.
Somit hat die Rechteckseite CZ die Länge $\overline{CZ} = \overline{A_1A_2} = a$. Die Rechteckseite B_3Z hat die Länge $\overline{B_3Z} = \overline{B_3B_2} + \overline{B_2Z} = b + \overline{B_2Z} = 2b$.
Damit hat das Rechteck B_3VCZ den Flächeninhalt $F(B_3VCZ) = 2b \cdot a$.

Die Flächeninhalte der beiden markierten Rechtecke A_3YCU und B_3VCZ sind also gleich. Nun wird das Rechteck A_3YCU durch die Diagonale A_3C in zwei gleich große rechtwinklige Dreiecke zerlegt, es gilt also für den Flächeninhalt des rechtwinkligen Dreiecks A_3YC: $F(A_3YC) = a \cdot b$. Analog ist $F(ZB_3C) = b \cdot a$. Man erhält das markierte Dreieck aus dem rechtwinkligen Dreieck A_3YC, indem man A_2YC von A_3YC abtrennt. Ebenso erhält man B_2B_3C aus ZB_3C, indem man ZB_2C von ZB_3C abtrennt. Aus
$F(A_3YC) = F(ZB_3C)$ und $F(A_2YC) = F(ZB_2C)$ (s. Behauptung) folgt also
$F(A_3A_2C) = F(B_2B_3C)$, was zu beweisen war.

3. Beweisvorschlag:

Die Punkte und Winkel werden wie in der Zeichnung bezeichnet.



Es gilt:

(1) $a = a_1$ und ß = ß$_1$, da sie Wechselwinkel an den Parallelen GH und CK bzw. GH und EA sind.

(2) $a = a_2$ und ß = ß$_2$, da a + ß = 90°, ß$_1$ + a_2 = 90°, a_1 + ß$_2$ = 90°, $a = a_1$ und ß = ß$_1$ ist.

(3) Im rechtwinkligen Dreieck ATD gilt: $\overline{DT} = \overline{AD} \cdot \sin(\alpha_2)$

Im rechtwinkligen Dreieck CKD gilt: $\overline{DS} = \overline{CD} \cdot \sin(\beta_2)$

Im rechtwinkligen Dreieck BHC gilt: $b = c \cdot \sin(\alpha)$.

Im rechtwinkligen Dreieck GBA gilt: $a = c \cdot \sin(\beta)$.

Aus (1) bis (3) und der Voraussetzung (3 Quadrate) folgt:

Dreieck EAD: $A_{EAD} = \frac{1}{2} \cdot \overline{EA} \cdot \overline{DT} = \frac{1}{2} \cdot a \cdot \overline{AD} \cdot \sin(\alpha_2) = \frac{1}{2} \cdot a \cdot c \cdot \sin(\alpha) = \frac{1}{2} \cdot a \cdot b$

Dreieck CKD: $A_{CKD} = \frac{1}{2} \cdot \overline{CK} \cdot \overline{DS} = \frac{1}{2} \cdot b \cdot \overline{CD} \cdot \sin(\beta_2) = \frac{1}{2} \cdot b \cdot c \cdot \sin(\beta) = \frac{1}{2} \cdot a \cdot b$

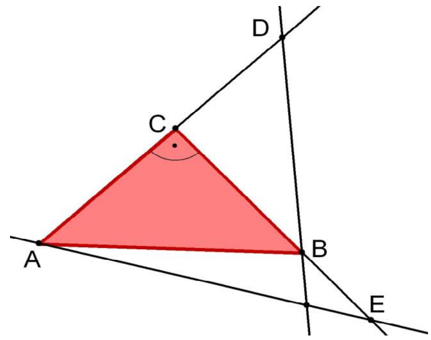
Damit ist die Behauptung bewiesen.

Aufgabe 5

Gegeben ist ein gleichschenklig-rechtwinkliges Dreieck ABC mit dem rechten Winkel bei C.

Die Punkte D und E liegen außerhalb des Dreiecks auf den Halbgeraden AC bzw. CB (vgl. Abbildung).

Beweise: Die Strecken $\overline{CD}$ und $\overline{CE}$ sind genau dann gleich lang, wenn sich die Geraden AE und BD rechtwinklig schneiden.

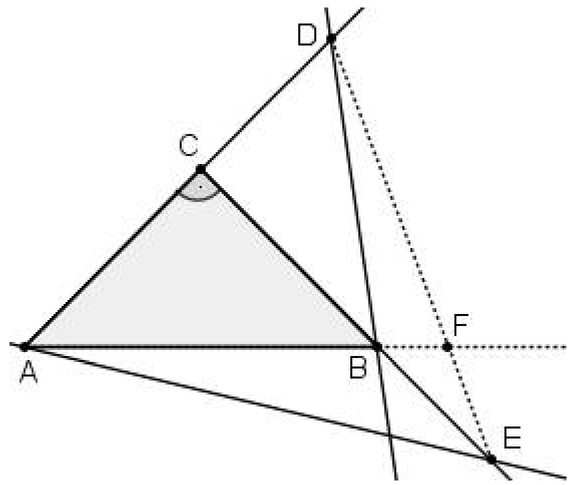


1. Beweisvorschlag:

Wir ergänzen die Figur durch die Strecke DE und betrachten das Dreieck AED.
CE ist eine Höhe in diesem Dreieck AED, da CE senkrecht auf AD steht. Der Schnittpunkt von AB mit DE sei F.

Da das Dreieck ABC gleichschenklig und rechtwinklig ist, sind die Innenwinkel bei A und B jeweils 45°.

Für den Scheitelwinkel $\sphericalangle$EBF gilt dies auch.



Angenommen es gilt $\overline{CD} = \overline{CE}$. Dann ist das Dreieck CED gleichschenklig und rechtwinklig, daher ist die Weite des Winkels $\sphericalangle$DEB als Basiswinkel in diesem Dreieck 45°. Das Dreieck BEF enthält also zwei Winkel, die 45° weit sind. Der dritte Winkel $\sphericalangle$BFE muss also 90° weit sein. Dann ist also AF eine zweite Höhe des Dreiecks AED und somit ist B der Höhenschnittpunkt des Dreiecks AED.
Da sich alle Höhen des Dreiecks AED in B schneiden, muss auf der Geraden BD die dritte Höhe des Dreiecks liegen. Also stehen AE und BD senkrecht aufeinander.

Sei nun umgekehrt angenommen, dass AE und BD senkrecht aufeinander stehen. Dann liegt auf der Geraden BD eine Höhe des Dreiecks AED und B ist der Höhenschnittpunkt des Dreiecks AED. Auf der Geraden AB liegt somit die dritte Höhe des Dreiecks AED.
Der Winkel $\sphericalangle$BFE ist also ein rechter Winkel.
Aus der Innenwinkelsumme im Dreieck BEF folgt daraus $\sphericalangle$DEB = 45°.
Aus der Innenwinkelsumme im Dreieck EDC folgt $\sphericalangle$CDE = 45°.
Das Dreieck EDC hat also zwei gleich weite Winkel, es ist somit gleichschenklig mit Basis DE. Somit gilt: $\overline{CD} = \overline{CE}$, was zu beweisen war.

2. Beweisvorschlag:

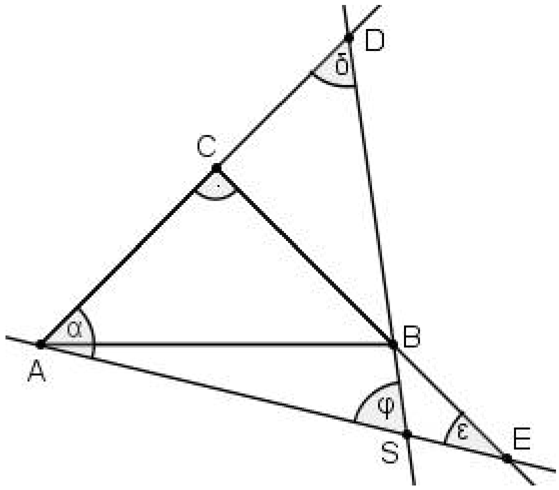
Es müssen in dieser „genau dann, wenn“ - Aussage zwei Richtungen gezeigt werden:

1. Richtung: $\overline{CE} = \overline{CD} \Rightarrow AE \perp BD$

2. Richtung: $AE \perp BD \Rightarrow \overline{CE} = \overline{CD}$

Die Bezeichnungen werden wie in der untenstehenden Skizze gewählt:

Beweis der 1. Richtung:



Angenommen es gilt: $\overline{CE} = \overline{CD}$.

Die Dreiecke AEC und BDC sind dann nach dem Kongruenzsatz SWS kongruent, denn es gilt:

$\overline{CA} = \overline{CB}$ (da nach Aufgabenstellung ABC gleichschenklig ist)

$\overline{CE} = \overline{CD}$ (Voraussetzung der 1. Richtung)

Außerdem haben beide Dreiecke bei C einen rechten Winkel.

Somit haben auch die anderen Winkel gleiche Weite und es gilt: $\varepsilon = \delta$.

Im rechtwinkligen Dreieck AEC gilt nach Winkelsummensatz: $\alpha + \varepsilon = 90°$.
Den Winkel φ kann man über die Winkelsumme im Dreieck ASD wie folgt berechnen:
$\varphi = 180° - (\alpha + \delta) = 180° - (\alpha + \varepsilon) = 180° - 90° = 90°$ und damit gilt $AE \perp BD$. Somit ist die erste Richtung bewiesen.

Beweis der 2. Richtung:

Angenommen es gilt $AE \perp BD$ (also: $\varphi = 90°$).

In den Dreiecken ASD und AEC gilt nach Winkelsummensatz:
$\delta = 90° - \alpha$ bzw. $\varepsilon = 90° - \alpha$.
Also gilt: $\varepsilon = \delta$.

Die Dreiecke AEC und BDC sind nach dem Kongruenzsatz SWW kongruent, denn:

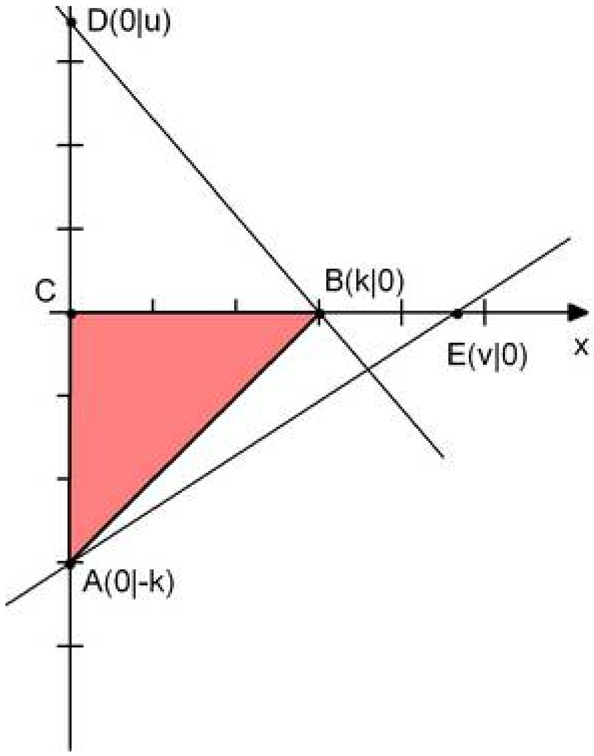
$\varepsilon = \delta$ (wie eben gezeigt)

$\overline{CA} = \overline{CB}$ (Voraussetzung in der Aufgabe)

$\sphericalangle ACE = \sphericalangle BCE = 90°$ (Voraussetzung in der Aufgabe).

Somit haben auch die anderen Strecken gleiche Länge; insbesondere gilt: $\overline{CE} = \overline{CD}$.

3. Beweisvorschlag:



Wir zeichnen das Dreieck ABC in ein Koordinatensystem, wobei C der Ursprung ist, A auf der y-Achse liegt und B auf der x-Achse.
Da ABC gleichschenklig ist, gilt $\overline{AC} = \overline{BC} = k$, also hat A die Koordinaten A(0|-k), B die Koordinaten B(k|0). Nach Aufgabenstellung liegt E auf der x-Achse, E hat also die Koordinaten E(v|0) für ein $v > k$. Ebenso liegt D auf der y-Achse, also hat D die Koordinaten D(0|u) für ein $u > 0$.

Dann hat die Gerade DB die Steigung $-\frac{u}{k}$, AE hat die Steigung $\frac{k}{v}$. Nun sind zwei Geraden genau dann orthogonal, wenn das Produkt ihrer Steigungen -1 ist, also sind AE und BD genau dann orthogonal, wenn $-\frac{u}{k} \cdot \frac{k}{v} = -1$. Dies ist wiederum äquivalent zu u = v, also zu $\overline{CD} = \overline{CE}$.

Aufgabe 6

Das Produkt dreier positiver ganzer Zahlen ist dreimal so groß wie ihre Summe. Bestimme alle Möglichkeiten für die drei Zahlen.

Lösung:

Die möglichen Tripel sind (1;4;15), (2;2;12), (1;5;9), (1;6;7), (2;3;5) und (3;3;3).

1. Beweisvorschlag:

Für die drei Zahlen a, b und c soll gelten: a·b·c = 3·(a+b+c). (*)

Ohne Beschränkung der Allgemeinheit kann angenommen werden, dass a = b = c gilt.

Damit gilt: $\frac{a}{c} \le \frac{b}{c} \le 1$. (**)

Dividiert man (*) durch c, so erhält man: $a \cdot b = 3 \cdot \left(\frac{a}{c} + \frac{b}{c} + 1\right)$

Mit (**) erhält man die Abschätzung: $a \cdot b \le 3 \cdot (1+1+1) = 9$, d. h. 1 = a·b = 9.

Die möglichen Fälle werden nun untersucht:

a·b = 1, d. h. a = 1 und b = 1. Dies wird in (*) eingesetzt:
1·c = 3·(1+1+c) ⇔ c = 6 + 3·c ⇔ -2·c = 6 ⇔ c = -3.
Dies ist nicht möglich, da c eine positive ganze Zahl sein soll.

a·b = 2, d. h. a = 1 und b = 2. Dies wird in (*) eingesetzt:
2·c = 3·(1+2+c) ⇔ 2·c = 9 + 3·c ⇔ c = -9.
Dies ist nicht möglich, da c eine positive ganze Zahl sein soll.

a·b = 3, d. h. a = 1 und b = 3. Dies wird in (*) eingesetzt:
3·c = 3·(1+3+c) ⇔ 3·c = 12 + 3·c ⇔ 0 = 12.
Das ist ein Widerspruch!

a·b = 4, d. h. entweder a = 1 und b = 4 oder a =2 und b = 2.
Wird a = 1 und b = 4 in (*) eingesetzt, so ergibt sich:
4·c = 3·(1+4+c) ⇔ 4·c = 15 + 3·c ⇔ c = 15.
Das ist Lösung 1: (1;4;15).
Wird a =2 und b = 2 in (*) eingesetzt, so ergibt sich:
4·c = 3·(2+2+c) ⇔ 4·c = 12 + 3·c ⇔ c = 12.
Das ist Lösung 2: (2;2;12).

a·b = 5, d. h. a = 1 und b = 5. Dies wird in (*) eingesetzt:
5·c = 3·(1+5+c) ⇔ 5·c = 18 + 3·c ⇔ c = 9.
Das ist Lösung 3: (1;5;9)

a·b = 6, d. h. entweder a = 1 und b = 6 oder a =2 und b = 3.
Wird a = 1 und b = 6 in (*) eingesetzt, so ergibt sich:
6·c = 3·(1+6+c) ⇔ 6·c = 21 + 3·c ⇔ c = 7.
Das ist Lösung 4: (1;6;7)
Wird a =2 und b = 3 in (*) eingesetzt, so ergibt sich:
6·c = 3·(2+3+c) ⇔ 6·c = 15 + 3·c ⇔ c = 5.
Das ist Lösung 5: (2;3;5)

a·b = 7, d. h. a = 1 und b = 7. Dies wird in (*) eingesetzt:
7·c = 3·(1+7+c) ⇔ 7·c = 24 + 3·c ⇔ c = 6.
Das ist ein Widerspruch zu b = c

$a \cdot b = 8$, d. h. entweder a = 1 und b = 8 oder a =2 und b = 4.

Wird a = 1 und b = 8 in (*) eingesetzt, so ergibt sich:

$8 \cdot c = 3 \cdot (1+8+c) \Leftrightarrow 8 \cdot c = 27 + 3 \cdot c \Leftrightarrow 5 \cdot c = 27.$

Das ist unmöglich, da c nicht ganzzahlig ist.

Wird a =2 und b = 4 in (*) eingesetzt, so ergibt sich:

$8 \cdot c = 3 \cdot (2+4+c) \Leftrightarrow 8 \cdot c = 18 + 3 \cdot c \Leftrightarrow 5 \cdot c = 18.$

Das ist unmöglich, da c nicht ganzzahlig ist.

$a \cdot b = 9$, d. h. entweder a = 1 und b = 9 oder a =3 und b = 3.

Wird a = 1 und b = 9 in (*) eingesetzt, so ergibt sich:

$9 \cdot c = 3 \cdot (1+9+c) \Leftrightarrow 9 \cdot c = 30 + 3 \cdot c \Leftrightarrow c = 5.$

Das ist ein Widerspruch zu b = c

Wird a =3 und b = 3 in (*) eingesetzt, so ergibt sich:

$9 \cdot c = 3 \cdot (3+3+c) \Leftrightarrow 9 \cdot c = 18 + 3 \cdot c \Leftrightarrow c = 3.$

Das ist Lösung 6: (3;3;3)

Da dies alle möglichen Fälle sind, ist bewiesen, dass es nur die in der Lösung genannten fünf Möglichkeiten gibt.

2. Beweisvorschlag:

Ohne Beschränkung der Allgemeinheit kann angenommen werden, dass a = b = c gilt (a, b, c ganze Zahlen).

1. Fall: a = b = c

Aus $abc = 3(a+b+c)$ folgt $a^3 = 3 \cdot 3a$ und damit $a^2 = 9$, also a = 3.

Das ist Lösung 6: a = b = c = 3

2. Fall: Es ist nicht a = b = c, also a = b < c oder a < b = c

Aus $abc = 3(a+b+c)$ folgt:

$$c = \frac{3a}{ab} + \frac{3b}{ab} + \frac{3c}{ab} \Leftrightarrow c = \frac{3}{b} + \frac{3}{a} + \frac{3c}{ab} \Leftrightarrow \frac{1}{3} = \frac{1}{bc} + \frac{1}{ac} + \frac{1}{ab}. \quad (1)$$

Aus a = b < c bzw. a < b = c und a, b, c > 0 folgt: $\frac{1}{ab} > \frac{1}{ac} \geq \frac{1}{bc}$ bzw. $\frac{1}{ab} \geq \frac{1}{ac} > \frac{1}{bc}$. (2)

Nach (1) und (2) ist die Summe der drei Brüche $\frac{1}{bc}, \frac{1}{ac}, \frac{1}{ab}$ gerade $\frac{1}{3}$. Wären alle drei Brüche kleinergleich $\frac{1}{9}$, so wäre ihre Summe kleiner $\frac{1}{3}$, da nicht alle drei Brüche gleich sind.

Somit muss mindestens der größte der drei Brüche, also $\frac{1}{ab}$, größer als $\frac{1}{9}$ sein.

Aus folgt: $\frac{1}{ab} > \frac{1}{9}$ folgt aber $ab < 9$.

Wegen $ab < 9$ und a = b sind folgende Produkte möglich:

ab	**a**	**b**	**Berechnung von c**
8	1	8	3(1 + 8 + c)= 8c; 27 = 5c, also keine ganzzahlige Lösung für c
8	2	4	3(2 + 4 + c) = 8c; 18 = 5c, also keine ganzzahlige Lösung für c
7	1	7	3(1 + 7 + c) = 7c; 24 = 4c; also c = 6; keine Lösung, da b = c
6	1	6	3(1 + 6 + c) = 6c; 21 = 3c; also c = 7 **(Lösung 4)**
6	2	3	3(2 + 3 + c) = 6c; 15 = 3c; also c = 5 **(Lösung 5)**
5	1	5	3(1 + 5 + c) = 5c; 18 = 2c; also c = 9 **(Lösung 3)**
4	1	4	3(1 + 4 + c) = 4c; also c = 15 **(Lösung 1)**
4	2	2	3(2 + 2 + c) = 4c; also c = 12 **(Lösung 2)**
3	1	3	3(1 + 3 + c) = 3c; Gleichung hat keine Lösung
2	1	2	3(1 + 2 + c) = 2c; c = -9; also keine positive Lösung für c
1	1	1	3(1 + 1 + c) = c; c = -3; also keine positive Lösung für c

Die grau unterlegten Zeilen ergeben die fünf fehlenden in der Lösung genannten Lösungen, so dass alle Lösungen gefunden sind und bewiesen ist, dass es keine weiteren gibt.