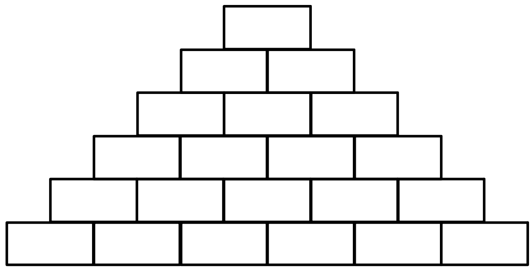
Landeswettbewerb Mathematik

Baden-Württemberg

Musterlösungen 2. Runde 2009/2010

Aufgabe 1

In die sechs Felder der untersten Zeile des Stufendreiecks werden sechs verschiedene natürliche Zahlen eingetragen. Die Zahlen zweier benachbarter Felder werden miteinander multipliziert und das Ergebnis wird in das Feld, das in der Mitte über diesen beiden Feldern liegt, geschrieben.



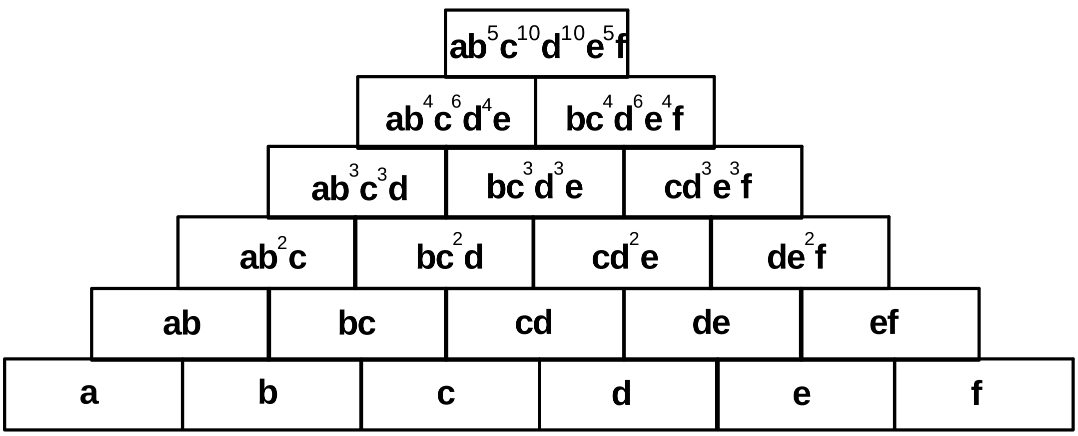
Nach dieser Vorschrift werden alle Felder der Reihe nach ausgefüllt.
Wie viele verschiedene Belegungen der untersten Zeile führen im obersten Feld zum Ergebnis 141 523 200 000?

Lösung:

Es gibt 16 verschiedene Belegmöglichkeiten für die unterste Zeile.

Beweismöglichkeit:

Schreibt man in die Felder der untersten Zeile die sechs Variabeln a, b, c, d, e und f, so erhält man nach obiger Vorschrift die folgende Belegung der übrigen Felder:



Die Zahl im obersten Feld wird also durch den Term $ab^5c^{10}d^{10}e^5f$ beschrieben.

Die Primfaktorzerlegung der gegebenen Zahl ist:
$141\,523\,200\,000 = 1\,415\,232 \cdot 100\,000 = \left(2^6 \cdot 3^5 \cdot 7 \cdot 13\right) \cdot \left(2^5 \cdot 5^5\right) = 2^{11} \cdot 3^5 \cdot 5^5 \cdot 7 \cdot 13$

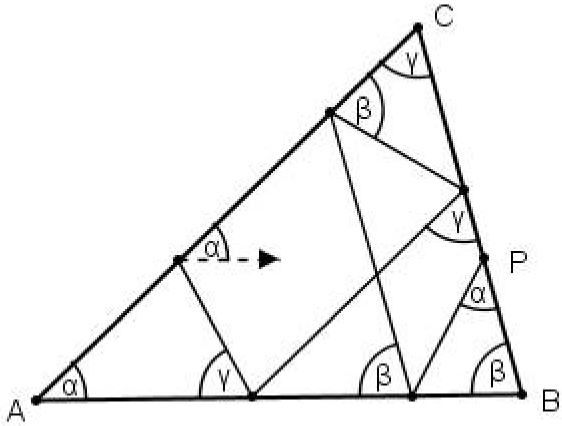
Durch Vergleich von $ab^5c^{10}d^{10}e^5f$ mit $2^{11} \cdot 3^5 \cdot 5^5 \cdot 7 \cdot 13$ ergibt sich:

- Die Variablen c und d müssen durch 1 und 2 belegt werden, denn nur die Faktoren 1 und 2 kommen in $2^{11} \cdot 3^5 \cdot 5^5 \cdot 7 \cdot 13$ mit einer Potenz von 10 oder mehr vor. Dies sind also zwei Möglichkeiten.
  Außerdem folgt $ab^5e^5f = 2 \cdot 3^5 \cdot 5^5 \cdot 7 \cdot 13$.
- Die Variablen b und e müssen durch 3 und 5 belegt werden, denn nur die Faktoren 1, 3, 5 und 15 kommen in $2 \cdot 3^5 \cdot 5^5 \cdot 7 \cdot 13$ mit einer Potenz von mindestens 5 vor. Da die 1 schon für c oder d vorkommt, kann sie nicht noch einmal verwendet werden (alle Zahlen müssen verschieden sein). Die Verteilung 1 und 15 für b und e ist also ausgeschlossen. Es gibt also wiederum zwei Möglichkeiten.
- Das Produkt der Belegungen von a und f muss nun $2 \cdot 7 \cdot 13$ sein, dieses Produkt bleibt in $2^{11} \cdot 3^5 \cdot 5^5 \cdot 7 \cdot 13$ übrig. Wieder darf weder a noch f durch 1 oder 2 belegt werden, da diese Zahlen schon für c und d vorkommen. Somit sind die folgenden Belegungen für a und f möglich: $2 \cdot 7 = 14$ und 13 bzw. $2 \cdot 13 = 26$ und 7. Zusammen sind dies vier Möglichkeiten.

Insgesamt gibt es demnach 2·2·4 = 16 Belegmöglichkeiten für die unterste Zeile.

Aufgabe 2

In einem Dreieck ABC beginnt bei einem Punkt P der Seite $\overline{BC}$ ein Streckenzug, dessen Eckpunkte der Reihe nach auf den Seiten $\overline{AB}$, $\overline{AC}$, $\overline{BC}$, $\overline{AB}$, $\overline{AC}$ und schließlich wieder auf $\overline{BC}$ liegen. Die Winkel, die die Strecken mit diesen Seiten einschließen, sind der Reihe nach α, β, β, γ, γ und wieder α (siehe nebenstehende Abbildung).



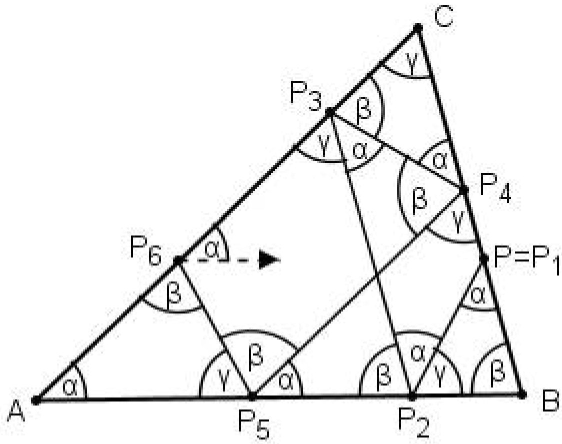
Endet dieser Streckenzug bei P?

Lösung:

Der Streckenzug endet – unabhängig von der Lage von P – wieder in P.

Beweismöglichkeit:

Wir benennen die durch den Streckenzug bestimmten Anfangs–, Teil– und Endpunkte auf den Seiten der Reihe nach mit $P_1 = P$, P_2, ... P_6, P_7; es wird dann gefragt, ob P_7 und P_1 identisch sind.
Um zu zeigen, dass $P_1 = P_7$ ist, genügt es zu zeigen, dass $\sphericalangle P_1P_6C = \alpha$. Nach Definition des Streckenzugs ist dann $P_7 = P$.



Zunächst betrachten wir die Strecke $\overline{P_2P_3}$. Nach Voraussetzung schließt sie mit $\overline{AB}$ den Winkel β ein, also den gleichen Winkel, den auch die Strecke $\overline{BC}$ mit $\overline{AB}$ einschließt. Also ist $\overline{P_2P_3} \parallel \overline{AB}$, insbesondere $\sphericalangle AP_3P_2 = \sphericalangle ACB = \gamma$.

Weiter betrachten wir das Dreieck P_1P_2B. Nach den Angaben in der Aufgabe hat dieses Dreieck bei P_1 den Innenwinkel α und bei B den Innenwinkel β, und somit nach dem Satz von der Innenwinkelsumme im Dreieck bei P_2 den Innenwinkel γ. Damit setzt sich der gestreckte Winkel $\sphericalangle BP_2A$ aus den Winkeln β, γ und $\sphericalangle P_1P_2P_3$ zusammen. Da $\alpha+\beta+\gamma = 180°$, folgt $\sphericalangle P_1P_2P_3 = \alpha$.

Analog erhalten wir $\overline{P_4P_5} \parallel \overline{AC}$ und $\overline{P_6P_7} \parallel \overline{AB}$. Außerdem erzeugt der Streckenzug bei den Punkten P_2, P_3, P_4, P_5 und P_6 stets drei Winkel der Größe α, β und γ, die so - wie in der Abbildung oben gezeichnet - angeordnet sind.

Das Viereck $P_1P_2P_3P_4$ ist also ein Trapez, das zudem gleiche Innenwinkel bei P_2 und bei P_3 hat. Es ist also ein achsensymmetrisches, gleichschenkliges Trapez. Insbesondere ist $\overline{P_1P_2} = \overline{P_3P_4}$.

Analog ist auch $P_3P_4P_5P_6$ ist ein achsensymmetrisches Trapez, da es gleiche Innenwinkel bei P_4 und P_5 hat. Also ist $\overline{P_3P_4} = \overline{P_5P_6}$, hieraus folgt $\overline{P_1P_2} = \overline{P_5P_6}$.

Für den Rest des Beweises geben wir drei Varianten an:

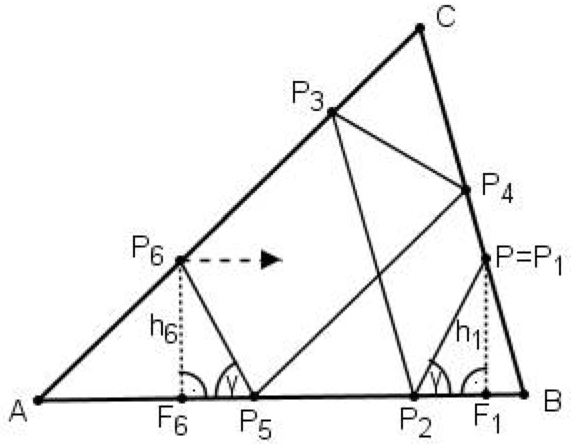
Variante 1: Wir betrachten das Viereck $P_6P_5P_2P_1$. Da $\sphericalangle P_2P_5P_6 = \sphericalangle P_1P_2P_5 = \alpha + \beta$ und $\overline{P_1P_2} = \overline{P_5P_6}$, ist das Viereck $P_6P_5P_2P_1$ achsensymmetrisch bezüglich der Mittelsenkrechten der Strecke $\overline{P_2P_5}$. Insbesondere ist $\overline{P_2P_5} \parallel \overline{P_1P_6}$ und damit $\sphericalangle P_1P_6C = \sphericalangle BAC = \alpha$. Das war zu zeigen.

Variante 2: Man setzt den Streckenzug mit dem gleichen Schema weiter fort, indem man einen Punkt P_8 auf der Strecke $\overline{AB}$ so hinzufügt, dass $\overline{P_7P_8}$ mit der Strecke $\overline{AB}$ den Winkel α einschließt. Analog wie im obigen Beweis ist dann auch $P_6P_5P_8P_7$ ein achsensymmetrisches Trapez, genauso wie $P_6P_5P_2P_1$. Insbesondere $\overline{P_1P_2} \parallel \overline{P_7P_8}$ und diese beiden Strecken sind auch gleich lang, da sie beide gleich lang wie $\overline{P_5P_6}$ sind. Nach dem Kongruenzsatz WSW sind die beiden Dreiecke P_7P_8B und P_1P_2B nun kongruent und es folgt, dass $P_7 = P_1$.

Variante 3: Wir bezeichnen mit F_1 und F_6 die Fußpunkte der Lote h_1 und h_6 von P_1 und P_6 auf AB.
Dann gilt:

- $\overline{P_1P_2} = \overline{P_5P_6}$
- $\sphericalangle F_1P_2P_1 = \sphericalangle P_6P_5F_6 = \gamma$
- $\sphericalangle P_1F_1P_2 = \sphericalangle P_5F_6P_6 = 90^o$

Demnach sind nach dem Kongruenzsatz SWW die Dreiecke $P_2F_1P_1$ und $P_5P_6F_6$ kongruent.
Folglich ist $h_1 = h_6$ und $\overline{P_2P_5} \parallel \overline{P_1P_6}$.
Daraus folgt wieder $\sphericalangle P_1P_6C = \sphericalangle BAC = \alpha$, was zu zeigen ist.



Aufgabe 3

Beginnend mit 5 werden alle Primzahlen der Größe nach durchnummeriert: Die 5 erhält die Nummer 1, die 7 die Nummer 2, die 11 die Nummer 3 usw.

Zeige, dass jede dieser Primzahlen mehr als dreimal so groß wir ihre Nummer ist.

1. Beweismöglichkeit (Einteilung in Dreierblöcke):

Wir teilen die natürlichen Zahlen = 4 in Dreierblöcke ein:

4, 5, 6,   7, 8, 9,   10, 11, 12, …

Der n-te Dreierblock besteht dabei aus den Zahlen 3n+1, 3n+2 und 3n+3 (n = 1).
In jedem Dreierblock ist die größte Zahl 3n+3 durch 3 teilbar (und größer als 3), also keine Primzahl.
Von den beiden aufeinander folgenden Zahlen 3n+1 und 3n+2 ist genau eine gerade (und größer als 2), also ebenfalls keine Primzahl.
Daher gibt es in jedem Dreierblock höchstens eine Primzahl, wobei es auch möglich ist, dass in einem Dreierblock gar keine Primzahl enthalten ist. Dies ist erstmals beim achten Dreierblock 25,26,27 der Fall.
Bis zum siebten Dreierblock, ist also die Nummer der Primzahl, die im n-ten Dreierblock enthalten ist, genau n. Die Primzahl mit der Nummer 8 (also 29) ist erst im neunten Block enthalten, da der achte Block keine Primzahl enthält. Da weiterhin jeder Dreierblock höchstens eine Primzahl enthält, ist also für $n \geq 8$ die Nummer einer Primzahl, die der n-te Dreierblock enthalten kann, sicher kleiner als n.
Falls sich die Primzahl p also im n-ten Block befindet, so ist ihre Nummer = n.
Wegen p = 3n+1 oder p = 3n+2 folgt: $p > 3 \cdot n = 3 \cdot$ (Nummer von p).

Dies war zu zeigen.

2. Beweismöglichkeit (Einteilung in Sechsergruppen):

Für die Primzahlen 5 und 7 stimmt die Behauptung offenbar.

Zur Untersuchung der größeren Primzahlen teilen wir die natürlichen Zahlen = 8 in Sechsergruppen ein.
Zu jedem n = 1 gehöre die Sechsergruppe 6n+2, 6n+3, 6n+4, 6n+5, 6n+6, 6n+7.

In jeder dieser Gruppen gibt es höchstens zwei Primzahlen, denn 6n+2, 6n+4 sowie 6n+6 sind durch 2 und 6n+3 ist durch 3 teilbar.

Falls nun (für ein $n = 1$) $6n+5$ eine Primzahl ist, so gibt es höchstens $2 + 2\cdot(n-1) = 2n$ kleinere Primzahlen $= 5$, nämlich die zwei Zahlen 5 und 7 sowie in den $n-1$ vorangehenden Sechsergruppen jeweils höchstens zwei Zahlen.

Also ist die Nummer der Primzahl $6n+5$ höchstens $2n+1$, und es ist $6n+5 > 3\cdot(2n+1)$.

Falls $6n+7$ eine Primzahl ist, so gibt es höchstens $2 + 2\cdot(n-1) + 1 = 2n+1$ kleinere Primzahlen, nämlich die zwei Zahlen 5 und 7, in den $n-1$ vorangehenden Sechsergruppen jeweils höchstens zwei Zahlen, und möglicherweise die Zahl $6n+5$.

Also ist die Nummer der Primzahl $6n+7$ höchstens $2n+2$, und es ist $6n+7 > 3\cdot(2n+2)$.

Somit ist die Behauptung für alle Primzahlen $= 5$ bewiesen.

3. Beweismöglichkeit (Schubfachprinzip):

Wir nehmen an, p sei eine Primzahl, die nicht größer als das Dreifache ihrer Nummer ist.

Dann sind in den n-1 Dreiergruppen (4,5,6), (7,8,9), (10,11,12), …, (3n-2,3n-1,3n) die ersten n nummerierten Primzahlen enthalten. Nach dem Schubfachprinzip gibt es also mindestens eine Dreiergruppe, in der mindestens zwei Primzahlen enthalten sind.

Dies ist aber nicht möglich, da die größte Zahl jeder Dreiergruppe immer ein echtes Vielfaches von 3 ist und damit keine Primzahl sein kann. Zusätzlich ist genau eine der beiden anderen Zahlen jeder Dreiergruppe immer ein echtes Vielfaches von 2 und damit ebenfalls keine Primzahl.

Dieser Widerspruch zeigt, dass die Annahme falsch ist und somit jede Primzahl mehr als dreimal so groß wie ihre Nummer ist.

Aufgabe 4

Gegeben ist ein Kreis k_1 mit dem Mittelpunkt M und ein Punkt Q auf der Kreislinie. Auf der Halbgeraden durch M und Q, die M als Endpunkt hat, durchläuft der Punkt P alle Lagen, für die der Kreis k_2 um P durch M den Kreis k_1 schneidet. Wir betrachten die Punkte T_1 und T_2, in denen die gemeinsamen Tangenten der beiden Kreise den Kreis k_2 berühren.

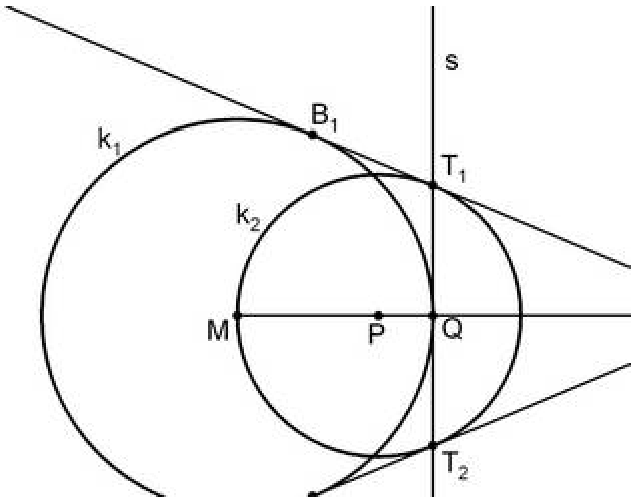
Welche Bahn beschreiben T_1 und T_2?

Lösung:

Die gesuchte Bahn ist die senkrechte Gerade s zu MQ durch Q. Es ist also die Tangente an k_1 in Q.

Vorbemerkungen:

Die folgende Figur stellt die in der Aufgabe beschriebene Situation dar:



1. Die gesamte Figur ist achsensymmetrisch zur Geraden MQ. Daher liegen auch die Berührpunkte B_1 und B_2 bzw. T_1 und T_2 der gemeinsamen Tangenten mit k_1 bzw. k_2 achsensymmetrisch zu MQ. Es ist deshalb ausreichend, nur eine gemeinsame Tangente zu betrachten. Ihre Berührpunkte mit k_1 und k_2 nennen wir B bzw. T.

2. Ein vollständiger Beweis erfordert den Nachweis von zwei Behauptungen:
   Beh. 1 T liegt auf der Geraden s.
   Beh. 2 Zu jedem Punkt S auf der Geraden s gibt es einen Punkt P auf der Halbgeraden MQ mit Endpunkt M, so dass eine gemeinsame Tangente an die beiden Kreise k_1 und k_2 existiert, deren Berührpunkt mit k_2 gerade S ist. Hierbei ist k_2 der Kreis mit Mittelpunkt P durch M.

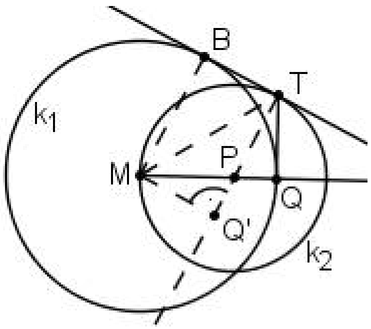
3. Zu betrachten sind die drei Fälle:
   Fall 1: P liegt innerhalb von k_1, d. h. $r_1 > r_2$.
   Fall 2: P liegt auf k_1, d. h. $r_1 = r_2$.
   Fall 3: P liegt außerhalb von k_1, d. h. $r_1 < r_2$.
   Die dargestellten Beweise decken jeweils alle drei Fälle ab.

1. Beweismöglichkeit (mit Kongruenzsätzen):

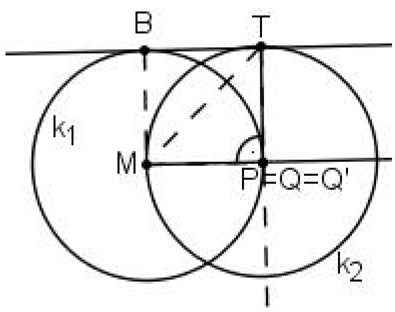
Beweis von Beh. 1:

Sei P ein Punkt auf der Halbgeraden und sei T ein Berührpunkt einer gemeinsamen Tangente an die Kreise k_1 und k_2.
Wir bezeichnen den Lotfußpunkt von M auf die Gerade PT mit Q'.

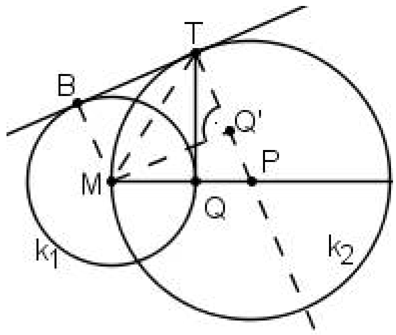
Fall 1



Fall 2



Fall 3



Die Dreiecke MQT und MQ'T sind nach dem Kongruenzsatz SWS kongruent:

- Sie besitzen die gemeinsame Seite $\overline{MT}$.
- M und T liegen auf dem Kreis k_2 um P, d. h. das Dreieck MPT ist gleichschenklig mit Basis $\overline{MT}$. Daraus folgt: $\sphericalangle QMT = \sphericalangle MTQ'$.
- B und Q liegen auf dem Kreis k_1 um M, d.h. $\overline{MQ} = \overline{MB}$. Da die Gerade BT eine Tangente an beide Kreise ist, ist sie senkrecht zu den Radien $\overline{MB}$ und $\overline{PT}$, also $\sphericalangle BTQ' = \sphericalangle MBT = 90^o$. Das Viereck MQ'TB ist also ein Rechteck, d.h. $\overline{MB} = \overline{Q'T}$. Aus $\overline{MQ} = \overline{MB}$ und $\overline{MB} = \overline{Q'T}$ folgt $\overline{MQ} = \overline{Q'T}$.

Aus der Kongruenz von MQT und MQ'T folgt $\sphericalangle TQM = \sphericalangle TQ'M = 90^o$. Damit ist bewiesen, dass T auf s liegt.

Beweis von Beh. 2:

Wir betrachten einen beliebigen Punkt S auf der Geraden s.

Ist S = Q, so wählen wir P als Mittelpunkt der Strecke $\overline{MQ}$, also $r_2 = \frac{r_1}{2}$.

Dann berühren sich k_1 und k_2 in Q.
Die Tangenten an k_1 und k_2 in Q fallen dann mit s zusammen.

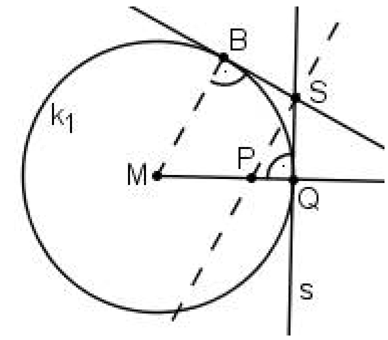
Ist S $\neq$ Q, so liegt S außerhalb von k_1 und die Punkte MQS bilden ein Dreieck mit rechtem Winkel bei Q.

Somit ist SQ eine Tangente an k_1 und es gibt eine zweite Tangente von S an k_1, deren Berührpunkt mit k_1 mit B bezeichnet wird.

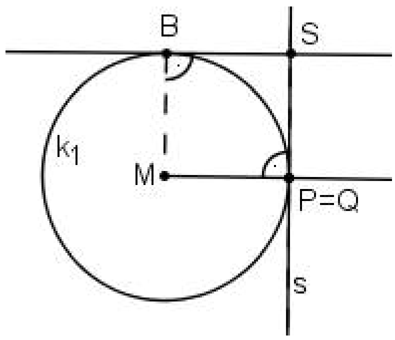
Für den Rest des Beweises geben wir zwei Varianten an:

Variante 1:
Wir wählen P als Schnittpunkt der Parallelen zu MB durch S mit der Geraden MQ. Da MB nicht parallel zu MQ ist, existiert dieser Schnittpunkt P. Außerdem liegt P bezüglich der Geraden MB in derselben Halbebene wie S, also auf der Halbgeraden durch M und Q mit Endpunkt M.

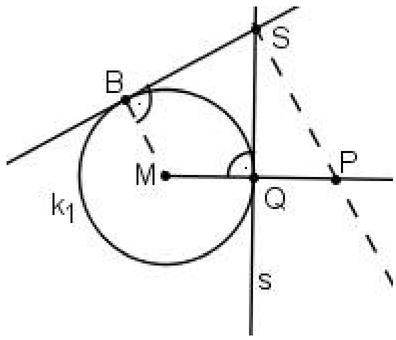
Fall 1



Fall 2



Fall 3



Sei nun k_2 der Kreis um P mit Radius $\overline{MP}$.
Dann liegt S auf dem Kreis k_2:

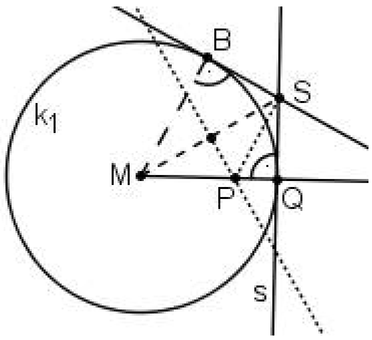
> Da MB parallel zu SP ist, gilt $\sphericalangle MSP = \sphericalangle SMB$ (Wechselwinkel). (1)
> Die Dreiecke MQS und BMS sind nach dem Kongruenzsatz SWS kongruent, denn $\overline{MQ} = \overline{MB}$ (beide Strecken sind Radien in k_1), $\overline{SQ} = \overline{SB}$ (gleich lange Tangentenabschnitte) und $\sphericalangle SQM = \sphericalangle MBS = 90^\circ$.
> Somit gilt $\sphericalangle SMB = \sphericalangle PMS$. (2)
> Aus (1) und (2) folgt: $\sphericalangle MSP = \sphericalangle PMS$.
> Das Dreieck MPS ist also gleichschenklig mit Basis $\overline{MS}$, also $\overline{PM} = \overline{PS}$ und S liegt auf dem Kreis k_2 vom Radius $\overline{MP}$ um P.

Nach Konstruktion steht BS sowohl senkrecht auf MB als auch auf PS, ist also gemeinsame Tangente an k_1 und k_2. Insbesondere ist S wie behauptet ein Berührpunkt mit k_2 von einer gemeinsamen Tangente an die beiden Kreise.

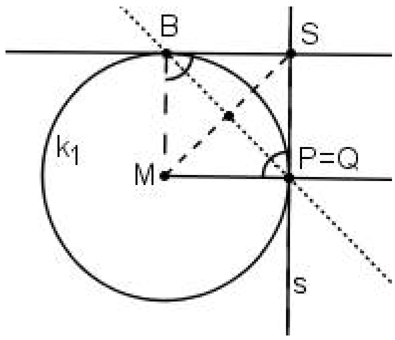
Variante 2:

Wir wählen P als Schnittpunkt der Mittelsenkrechten der Strecke $\overline{MS}$ mit der Geraden MQ. MS nicht parallel zu QS liegen kann, existiert dieser Schnittpunkt P. Außerdem liegt P bezüglich der Geraden MS in derselben Halbebene wie Q, also auf der Halbgeraden durch M und Q mit Endpunkt M.

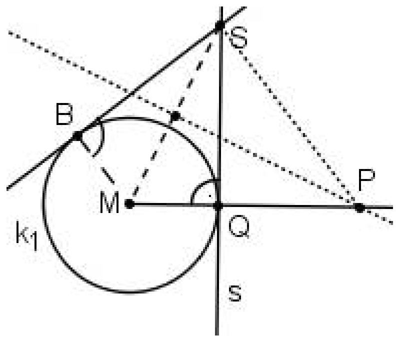
Fall 1



Fall 2



Fall 3



Sei nun k_2 wieder der Kreis um P mit Radius $\overline{MP}$.
Dann liegt S auf k_2, denn P liegt auf der Mittelsenkrechten von $\overline{MS}$, also $\overline{PM} = \overline{PS}$.

Die Dreiecke MSB und MQS sind kongruent:

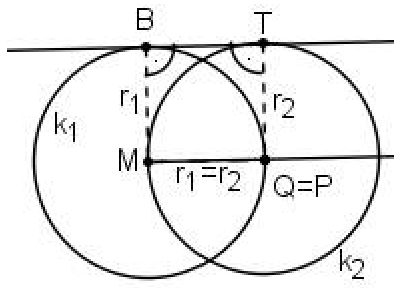
> Da die Geraden SB und SQ Tangenten von S an k_1 sind, gilt $\overline{SB} = \overline{SQ}$ (gleich lange Tangentenabschnitte).
> Da B und Q auf dem Kreis k_1 um M liegen, gilt $\overline{BM} = \overline{MQ}$.
> Ferner gilt: $\sphericalangle MBS = \sphericalangle SQM = 90^\circ$.
> Folglich sind MSB und MQS nach dem Kongruenzsatz SWS kongruent.

Insbesondere gilt: $\sphericalangle SMB = \sphericalangle QMS$. (1)
Da $\overline{PM} = \overline{PS}$, gilt im gleichschenkligen Dreieck MPS:
$\sphericalangle PMS = \sphericalangle QMS = \sphericalangle MSP$. (2)
Ferner gilt im Dreieck MSB: $\sphericalangle BSM = 90^\circ - \sphericalangle SMB$. (3)
Aus (1)-(3) ergibt sich: $\sphericalangle BSP = \sphericalangle BSM + \sphericalangle MSP = 90^\circ - \sphericalangle SMB + \sphericalangle SMB = 90^\circ$.
Somit ist die Gerade BS senkrecht zum Radius $\overline{PS}$ und somit eine Tangente an den Kreis k_2.
Insgesamt ist also BS eine gemeinsame Tangente an die beiden Kreise mit Berührpunkt S mit k_2.

2. Beweismöglichkeit (mit Strahlen- und Kathetensatz):

Beweis von Beh. 1:

Sei P ein Punkt auf der Halbgeraden und sei T ein Berührpunkt einer gemeinsamen Tangente an die Kreise k_1 und k_2.



Fall 2: $r_1 = r_2$.

Dann gilt $\overline{BM} = \overline{MQ} = \overline{QT} = r_1 = r_2$.

Da BT Tangente an k_1 und k_2 ist, gilt:

$\sphericalangle MBT = \sphericalangle BTQ = 90^o$.

Daraus folgt: BMQT ist ein Quadrat.

Folglich steht QT senkrecht auf MQ und T liegt somit auf s.

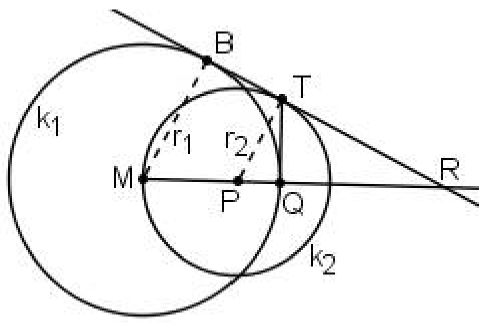
Fall 1: $r_1 > r_2$ und **Fall 3:** $r_1 < r_2$.

In beiden Fällen sind die Geraden MQ und BT nicht parallel, d. h. sie schneiden sich in einem Punkt R.

Da BT Tangente an k_1 und k_2 ist, gilt $\sphericalangle MBT = \sphericalangle PTR = 90^o$. Somit ist MB parallel zu PT.

Demnach gilt nach dem zweiten Strahlensatz $\overline{RM} : \overline{RP} = r_1 : r_2$. Dies ist äquivalent zu

$$\overline{RM} = \frac{r_1}{r_2} \cdot \overline{RP} \qquad (*)$$



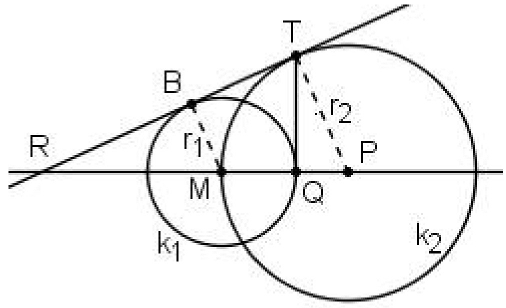
Fall 1: $\overline{RM} = \overline{RP} + r_2$ in (*) eingesetzt ergibt

$\overline{RP} + r_2 = \frac{r_1}{r_2} \cdot \overline{RP}$. Dies führt auf

$r_2 = \frac{r_1}{r_2} \cdot \overline{RP} - \overline{RP} = \frac{r_1 - r_2}{r_2} \cdot \overline{RP}$ oder $\overline{RP} = \frac{r_2^{\ 2}}{r_1 - r_2}$.

Außerdem gilt $\overline{PQ} = \overline{MQ} - \overline{PM} = r_1 - r_2$.

Damit erhält man $\overline{RP} \cdot \overline{PQ} = \frac{r_2^{\ 2}}{r_1 - r_2} \cdot (r_1 - r_2) = r_2^{\ 2} = \overline{PT}^2$.



Fall 3: $\overline{RM} = \overline{RP} - r_2$ eingesetzt in (*) ergibt:

$\overline{RP} - r_2 = \frac{r_1}{r_2} \cdot \overline{RP}$. Dies führt auf

$r_2 = \overline{RP} - \frac{r_1}{r_2} \cdot \overline{RP} = \frac{r_2 - r_1}{r_2} \cdot \overline{RP}$ oder $\overline{RP} = \frac{r_2^{\ 2}}{r_2 - r_1}$.

Außerdem gilt $\overline{PQ} = \overline{PM} - \overline{MQ} = r_2 - r_1$.

Damit erhält man: $\overline{RP}\cdot\overline{PQ}=\frac{r_2^{\,2}}{r_2-r_1}\cdot(r_2-r_1)=r_2^{\,2}=\overline{PT}^2$.

Da das Dreieck PTR rechtwinklig ist, folgt nun in beiden Fällen aus der Umkehrung des Kathetensatzes:
Q ist Höhenfußpunkt der Höhe von T auf der Strecke $\overline{PR}$.
Somit steht QT senkrecht auf MQ und T liegt also auf s.

Beweis von Beh. 2:
Wir betrachten einen beliebigen Punkt S auf der Geraden s.

Fall 2: In diesem Fall ist BS parallel zu MQ. Wir wählen P = Q, also $r_1 = r_2$.
Dann ist BS Tangente an k_1 und k_2 und berührt k_2 in S.

Fall 1 und **Fall 3:**
Wir wählen P als Schnittpunkt der Parallelen zu MB durch S mit MQ.
Zu zeigen ist dann: $\overline{PM}=\overline{PS}$. Wie in Variante 1 bei Beweismöglichkeit 1 folgt dann, dass S Berührpunkt einer gemeinsamen Tangente an beide Kreise mit k_2 ist, wobei k_2 der Kreis um P mit Radius $\overline{PM}$ ist.

Sei $r_2=\overline{PS}$. Wie beim Beweis von Behauptung 1 ergibt der Strahlensatz (s. Zeichnung oben, nur mit S statt T)

$$\overline{RM}:\overline{RP}=r_1:r_2 \text{ oder } \overline{RM}=\frac{r_1}{r_2}\cdot\overline{RP}$$

und der Kathetensatz

$$\overline{RP}\cdot\overline{QP}=\overline{PS}^2=r_2^{\,2} \text{ oder } \overline{RP}=\frac{r_2^{\,2}}{\overline{QP}}.$$

Fall 1:

$$\overline{PM}=\overline{RM}-\overline{RP}=\frac{r_1}{r_2}\cdot\overline{RP}-\overline{RP}=\left(\frac{r_1}{r_2}-1\right)\cdot\overline{RP}=\frac{r_1-r_2}{r_2}\cdot\frac{r_2^{\,2}}{\overline{QP}}=\frac{(r_1-r_2)\cdot r_2}{\overline{QM}-\overline{PM}}=\frac{(r_1-r_2)\cdot r_2}{r_1-\overline{PM}}.$$

Fall 3:

$$\overline{PM}=\overline{RP}-\overline{RM}=\overline{RP}-\frac{r_1}{r_2}\overline{RP}=\left(1-\frac{r_1}{r_2}\right)\cdot\overline{RP}=\frac{r_2-r_1}{r_2}\cdot\frac{r_2^{\,2}}{\overline{QP}}=\frac{(r_2-r_1)\cdot r_2}{\overline{PM}-\overline{QM}}=\frac{(r_2-r_1)\cdot r_2}{\overline{PM}-r_1}.$$

Beide Fälle führen auf die quadratische Gleichung
$\overline{PM}^2-r_1\cdot\overline{PM}-r_2^{\,2}+r_1\cdot r_2=0$ mit den Lösungen $\overline{PM}=r_2$ und $\overline{PM}=r_1-r_2$.

Die zweite Lösung kann ausgeschlossen werden, da $\overline{PM}\geq\frac{r_1}{2}$ und $r_2\geq\frac{r_1}{2}$.

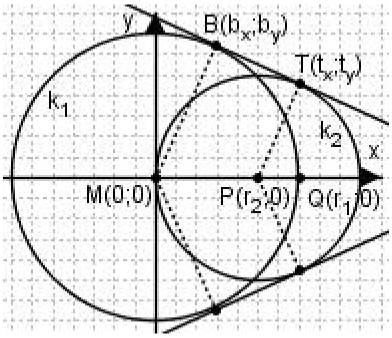
Somit gilt $\overline{PM}=r_2=\overline{PS}$, was zu zeigen war.

3. Beweismöglichkeit (im Koordinatensystem):

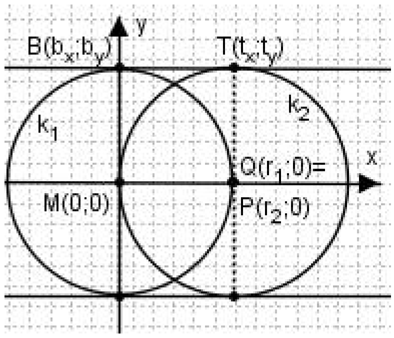
Beweis von Beh. 1:

Wir legen über die Figur ein Koordinatensystem, so dass gilt: M(0;0), Q(r_1;0).
Damit ergibt sich: P(r_2;0), B(b_x;b_y) und T(t_x;t_y).

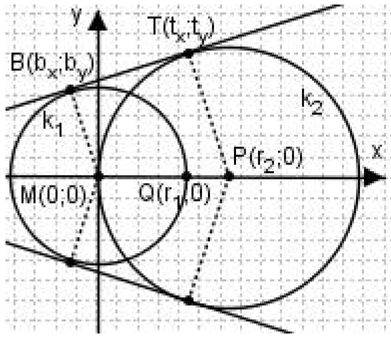
Fall 1



Fall 2



Fall 3



Da die Geraden BM und TP die gleiche Steigung haben, gilt $\frac{b_y}{b_x} = \frac{t_y}{t_x - r_2}$. Außerdem

$\frac{b_y}{t_y} = \frac{r_1}{r_2}$, somit $b_x = \frac{r_1}{r_2} \cdot t_x - r_1$ (I) und $b_y = \frac{r_1}{r_2} \cdot t_y$ (II).

Da die Tangente BT senkrecht auf dem Radius $\overline{PT}$ steht, gilt für ihre Steigungen

$m_{BT} = -\frac{1}{m_{PT}}$. Dies führt auf $\frac{t_y - b_y}{t_x - b_x} = -\frac{t_x - r_2}{t_y}$ oder $\left(t_y - b_y\right) \cdot t_y = -\left(t_x - r_2\right) \cdot \left(t_x - b_x\right)$

bzw. $t_y^2 - b_y \cdot t_y = -t_x^2 + t_x \cdot b_x + r_2 \cdot t_x - r_2 \cdot b_x$.

Ersetzt man nun b_x und b_y entsprechend (I) und (II), so erhält man

$$t_y^2 - \frac{r_1}{r_2} \cdot t_y^2 = -t_x^2 + t_x^2 \cdot \frac{r_1}{r_2} - t_x \cdot r_1 + r_2 \cdot t_x - r_1 \cdot t_x + r_2 \cdot r_1. \qquad (*)$$

Da $\overline{PT} = r_2$, gilt nach dem Satz von Pythagoras:

$$\left(t_x - r_2\right)^2 + t_y^2 = r_2^2 \Leftrightarrow t_y^2 = r_2^2 - \left(t_x - r_2\right)^2 = r_2^2 - t_x^2 + 2 \cdot t_x \cdot r_2 - r_2^2 = -t_x^2 + 2 \cdot t_x \cdot r_2 \qquad (**)$$

Ersetzt man mit (**) t_y^2 in (*), so erhält man:

$$-t_x^2 + 2 \cdot t_x \cdot r_2 + \frac{r_1}{r_2} \cdot t_x^2 - 2 \cdot t_x \cdot r_1 = -t_x^2 + \frac{r_1}{r_2} \cdot t_x^2 - 2 \cdot t_x \cdot r_1 + t_x \cdot r_2 + r_2 \cdot r_1$$

Addiert man auf beiden Seiten dieser Gleichung t_x^2 und $2 \cdot t_x \cdot r_2$ und subtrahiert man $\frac{r_1}{r_2} \cdot t_x^2$ und $t_x \cdot r_2$, so bleibt $t_x \cdot r_2 = r_2 \cdot r_1$ oder $t_x = r_1$.

Somit T liegt auf der Senkrechten s zu MQ durch Q, d.h. Behauptung 1 ist bewiesen.

Beweis von Beh. 2:

Setzt man $t_x = r_1$ in (**) ein, so erhält man $t_y^2 = -r_1^2 + 2 \cdot r_1 \cdot r_2$ bzw. $r_2 = \frac{t_y^2 + r_1^2}{2 \cdot r_1}$.

Zu jedem t_y ist also $r_2 \geq \frac{r_1}{2}$ und damit existiert ein Punkt P auf der Halbgeraden.

Somit ist s die Bahn von T.