# Landeswettbewerb Mathematik
## Baden-Württemberg
### Musterlösungen 1. Runde 2009/2010

### *Aufgabe 1*

*Wird zu einer natürlichen Zahl ihre Quersumme addiert, so erhält man 2010. Bestimme alle Zahlen, bei denen dies zutrifft.*

### *Lösung:*

Die Zahlen **1986** und **2004** sind die einzigen natürlichen Zahlen, die addiert zu ihrer Quersumme 2010 ergeben.

### *1. Beweisvorschlag:*

Für eine Zahl n schreiben wir QS(n) für die Quersumme von n.

Die gesuchten Zahlen n müssen alle kleiner als 2010 sein, da sich erst, wenn man eine weitere natürliche Zahl QS(n) zu n addiert, 2010 ergibt.

Die größtmögliche Quersumme einer Zahl, die kleiner als 2010 ist, ist 28: Die Zahlen unterhalb von 2000 haben die größte Quersumme, wenn alle Ziffern der Zahl möglichst groß sind. Dies ist für 1999 der Fall, wobei QS(1999)=1+9+9+9=28. Die Zahlen zwischen 2000 und 2010 haben offensichtlich alle eine kleinere Quersumme als 28.

Somit dürfen die gesuchten Zahlen alle höchstens um 28 unterhalb von 2010 liegen: Andernfalls könnte man durch Addition der Quersumme, die ja höchstens 28 ist, nicht 2010 erreichen. Es kommen also nur die Zahlen zwischen 1981 und 2010 in Frage.

Man kann nun diese 28 Zahlen schnell der Reihe nach durchprobieren und die oben genannten Lösungen finden.

Durch einfache Überlegungen kann man jedoch weitere Zahlen ausschließen und das Probieren verkürzen. So kann in jeder der drei Dekaden 1980 bis 1989, 1990 bis 1999 und 2000 bis 2009 höchstens eine Lösung vorhanden sein: Erhöht man innerhalb einer solchen Dekade nämlich die Zahl um 1, so erhöht sich auch die zugehörige Quersumme um 1, da es ja keinen Zehnerübergang gibt. Somit erhöht sich die Summe aus der Zahl und ihrer Quersumme um 2. Nur für eine Zahl aus der Dekade kann sich also genau 2010 ergeben.

Für n = 1982 ist 1982 + QS(1982) = 1982 + 20 = 2002. Es fehlt also noch 8 bis 2010. Da die Summe bei jeder Erhöhung der Zahl um 1 um 2 größer wird, muss man die Zahl 1982 um 4 vergrößern um die richtige Summe 2010 zu erhalten. So findet man die erste Zahl 1986.

Für n = 1990 ist 1990 + QS(1990) = 1990 + 19 = 2009. Für 1991 ergibt sich bereits 2011 als Summe. In der Dekade 1990 bis 1999 kann es also keine Zahlen mit der gesuchten Eigenschaft geben.

Für n = 2000 ist 2000 + QS(2000) = 2000 + 2 =2002. Es fehlt also noch 8 bis 2010. Da die Summe bei jeder Erhöhung der Zahl um 1 um 2 größer wird, muss man die Zahl 2000 um 4 vergrößern um die richtige Summe 2010 zu erhalten. So findet man die zweite mögliche Zahl 2004.

### *2. Beweisvorschlag:*

Für eine Zahl n schreiben wir QS(n) für die Quersumme von n.

Die gesuchten Zahlen n müssen alle kleiner als 2010 sein, da sich erst, wenn man eine weitere natürliche Zahl QS(n) zu n addiert, 2010 ergibt. Somit ist n höchstens vierstellig.

Demnach gibt es Ziffern a, b, c, d aus denen n zusammengesetzt ist, also $n = 1000 \cdot a + 100 \cdot b + 10 \cdot c + d$ mit $0 \le a,b,c,d \le 9$. Außerdem gilt dann $QS(n) = a + b + c + d$.

Aus $n \le 2010$ folgt $a \le 2$, es gibt also drei Fälle:

**Fall 1: a = 0.**

In diesem Fall ist

$$\begin{aligned} n + QS(n) &= (100 \cdot b + 10 \cdot c + d) + (b + c + d) \\ &= 101 \cdot b + 11 \cdot c + 2 \cdot d \le 101 \cdot 9 + 11 \cdot 9 + 2 \cdot 9 \\ &= 114 \cdot 9 = 1026 < 2010 \end{aligned}$$

Also ist in diesem Fall keine Lösung der Aufgabe möglich.

**Fall 2: a = 1.**

In diesem Fall ist

$$\begin{aligned} n + QS(n) &= (1000 + 100 \cdot b + 10 \cdot c + d) + (1 + b + c + d) \\ &= 1001 + 101 \cdot b + 11 \cdot c + 2 \cdot d \end{aligned}$$

Aus $n + QS(n) = 2010$ folgt $101 \cdot b + 11 \cdot c + 2 \cdot d = 1009$. Wäre $b \le 8$, so wäre $101 \cdot b + 11 \cdot c + 2 \cdot d \le 101 \cdot 8 + 11 \cdot 9 + 2 \cdot 9 = 925 < 1009$. Somit ist nur b = 9 möglich und es folgt $101 \cdot 9 + 11 \cdot c + 2 \cdot d = 1009$, also $11 \cdot c + 2 \cdot d = 100$. Nun ist $100 - 2 \cdot d$ gerade, also muss $11 \cdot c = 100 - 2 \cdot d$ ebenfalls gerade sein. Da das Produkt zweier ungerader Zahlen wieder ungerade wäre, muss c gerade sein.

Wegen $0 \le d \le 9$ liegt $100 - 2 \cdot d$ zwischen 82 und 100. Somit muss c = 8 sein, denn c = 8 ist die einzige gerade Zahl, für die $11 \cdot c$ zwischen 82 und 100 liegt. Zum Schluss folgt nun aus $11 \cdot c + 2 \cdot d = 100$, dass $d = \frac{100 - 11 \cdot 8}{2} = 6$ sein muss.

Also ist in diesem Fall nur die Lösung $n = 1000 \cdot 1 + 100 \cdot 9 + 10 \cdot 8 + 6 = 1986$ der Aufgabe möglich.

**Fall 3: a = 3.**

In diesem Fall ist

$$\begin{aligned} n + QS(n) &= (2000 + 100 \cdot b + 10 \cdot c + d) + (2 + b + c + d) \\ &= 2002 + 101 \cdot b + 11 \cdot c + 2 \cdot d \end{aligned}$$

Aus $n + QS(n) = 2010$ folgt $101 \cdot b + 11 \cdot c + 2 \cdot d = 8$.

Wäre b oder c > 0, so wäre die linke Seite dieser Gleichung zu groß, es muss also b = c = 0 sein.

Somit ergibt sich $2 \cdot d = 8$ oder d = 4.

Also ist in diesem Fall nur die Lösung $n = 1000 \cdot 2 + 100 \cdot 0 + 10 \cdot 0 + 4 = 2004$ möglich.

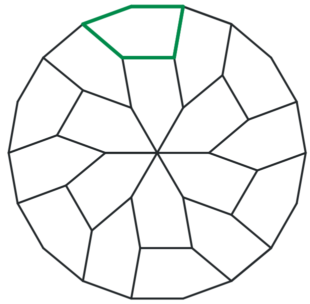
Aus den drei Fällen ergeben sich also genau die beiden Lösungen 1986 und 2004.

## Aufgabe 2

*Jedes regelmäßige 18-Eck kann man wie in der Figur dargestellt in kongruente* Fünfecke zerlegen.*

*Bestimme die Innenwinkel eines solchen Fünfecks.*

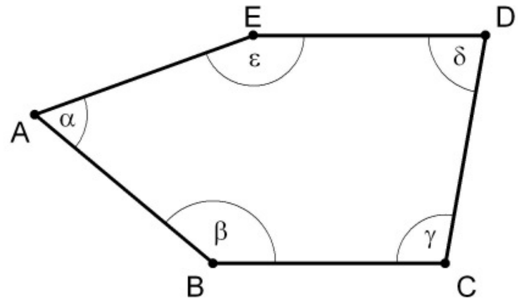
** Figuren heißen kongruent, wenn sie deckungsgleich aufeinander gelegt werden können.*



## Lösung:

Wie in der nebenstehenden Zeichnung bezeichnen wir den Punkt an der Spitze eines solchen Fünfecks mit A und davon ausgehend das Fünfeck (wie üblich entgegen dem Uhrzeigersinn) mit ABCDE. Dementsprechend werden die zugehörigen Innenwinkel mit $\alpha$, $\beta$, $\gamma$, $\delta$, $\varepsilon$ bezeichnet.

Diese Innenwinkel sind **$\alpha$ = 60°, $\beta$ = 140°, $\gamma$ = 100°, $\delta$ = 80°** und **$\varepsilon$ = 160°**.



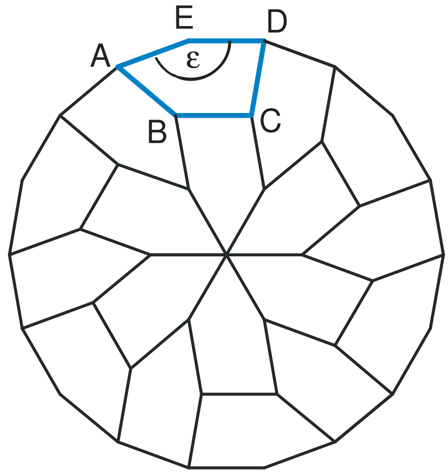

## 1. Beweisvorschlag:

Wir verwenden die Bezeichnungen, die oben eingeführt wurden.

Aus der nebenstehenden Zeichnung erkennt man, dass der Winkel $\varepsilon$ einer der Innenwinkel im regelmäßigen 18-Eck ist.

Die Innenwinkel im regelmäßigen n-Eck sind alle $\frac{n-2}{n} \cdot 180°$,

für n = 18 ergibt sich also $\varepsilon = \frac{18-2}{18} \cdot 180° = 160°$.

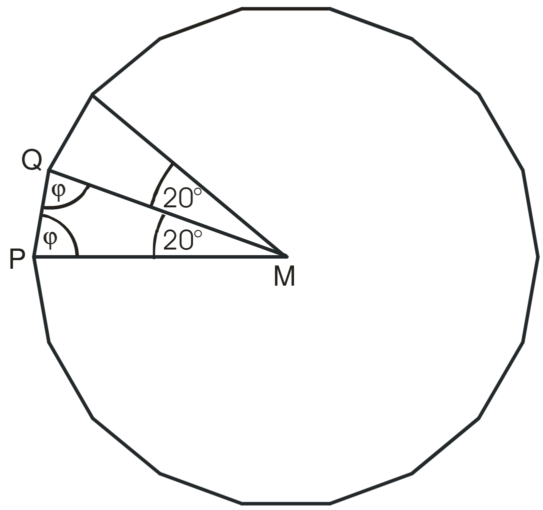



Man kann die Formel für die Innenwinkel im 18-Eck auch herleiten: Alle Punkte des regelmäßigen 18-Ecks liegen auf einem Kreis um den Mittelpunkt M. Verbindet man M mit den Eckpunkten so entstehen somit 18 kongruente gleichschenklige Dreiecke mit dem Spitzenwinkel $\frac{360°}{18} = 20°$.

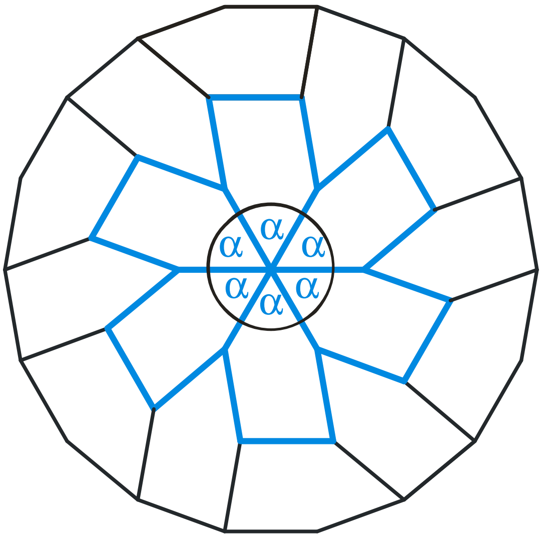
Somit sind die Basiswinkel $\varphi$ in so einem gleichschenkligen Dreieck PMQ

$\varphi = \frac{180° - 20°}{2} = 80°$.

Also sind die Innenwinkel im regelmäßigen 18-Eck $\varepsilon = 2\varphi = 160°$.

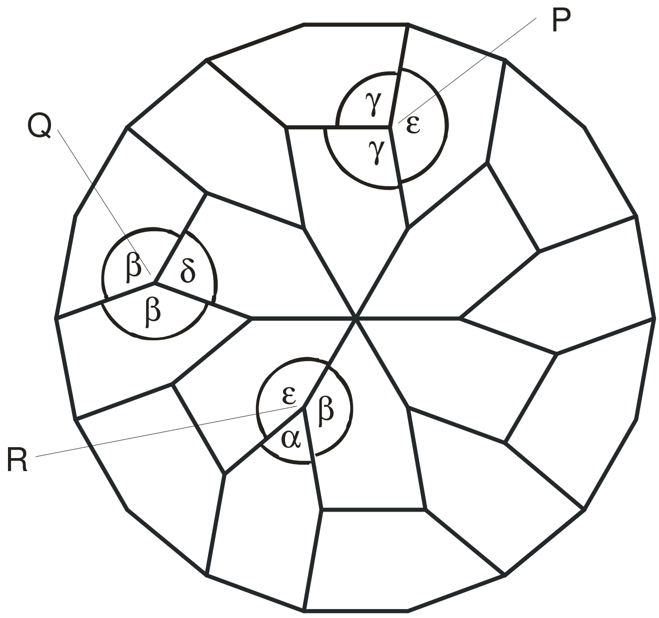


Im Mittelpunkt des 18-Ecks stoßen sechs der kongruenten Fünfecke zusammen, alle diese sechs Fünfecke haben dort den Winkel $\alpha$. Also ist $6 \cdot \alpha = 360°$ oder $\alpha = 60°$.




Somit sind $\alpha$ und $\varepsilon$ bestimmt, es fehlen noch $\beta$, $\gamma$ und $\delta$.

Wir betrachten den nebenstehend eingezeichneten Punkt P innerhalb des 18-Ecks: Hier treffen zwei Fünfecke mit dem Winkel $\gamma$ und ein Fünfeck mit dem Winkel $\varepsilon$ zusammen.




Also gilt $2 \cdot \gamma + \varepsilon = 2 \cdot \gamma + 160° = 360°$.

Somit $\gamma = 100°$.

Ebenso entnehmen wir den Winkeln beim Punkt R:

$\alpha + \beta + \varepsilon = 60° + \beta + 160° = 360°$.

Somit $\beta = 140°$.

Schließlich ergibt sich aus den Winkeln am Punkt Q:

$2 \cdot \beta + \delta = 280° + \delta = 360°$.

Somit $\delta = 80°$.

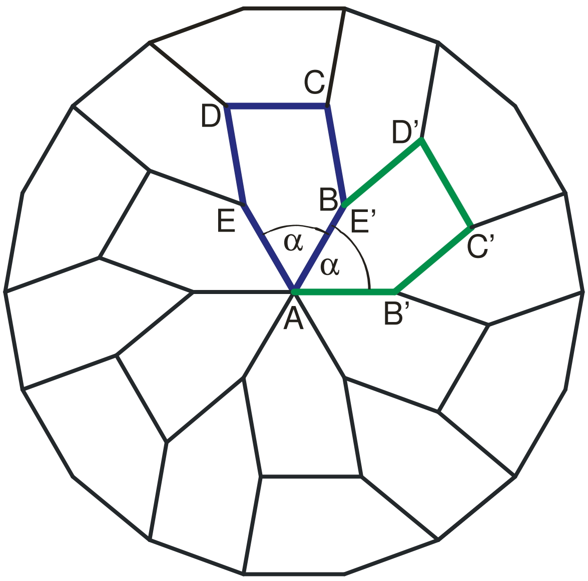
Damit sind alle Innenwinkel eines Fünfecks bestimmt.

## *2. Beweisvorschlag:*

Wie zu Beginn des ersten Beweisvorschlags werden zunächst die Innenwinkel $\alpha$ und $\varepsilon$ bestimmt.

### *Behauptung:*

Alle fünf Seiten im Fünfeck ABCDE sind gleich lang.




### *Beweis der Behauptung:*

Sind ABCDE und A'B'C'D'E' zwei solche nebeneinander liegenden Fünfecke, die im Mittelpunkt des 18-Ecks zusammentreffen, so ist A = A' und B = E' (siehe nebenstehende Zeichnung).

Da die Fünfecke kongruent sind, ist außerdem $\overline{A'E'} = \overline{AE}$. Somit gilt

(1) $\overline{AE} = \overline{A'E'} = \overline{AB}$.

Sind ABCDE, A'B'C'D'E', A*B*C*D*E* drei Fünfecke, die wie in der Zeichnung aneinanderliegen und den Punkt C = E' = C* gemeinsam haben, so ergibt sich aus den gemeinsamen Strecken:

(2) $\overline{BC} = \overline{A'E'} = \overline{AE}$;

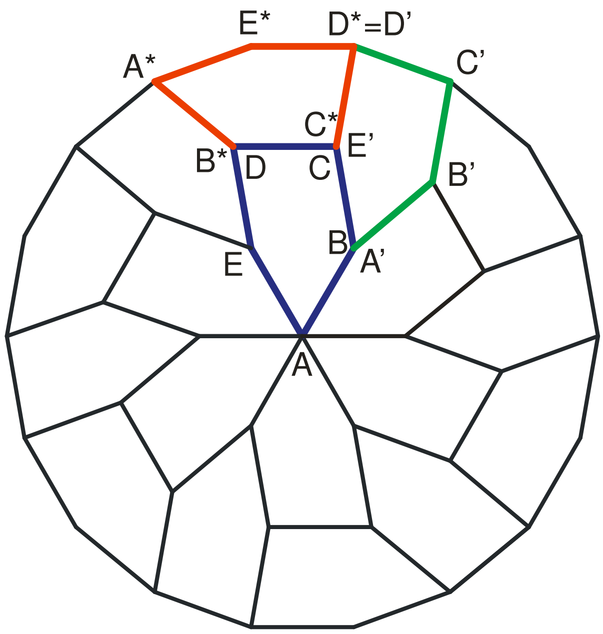
(3) $\overline{B^*C^*} = \overline{CD} = \overline{BC}$;

(4) $\overline{C^*D^*} = \overline{D'E'}$ bzw. $\overline{CD} = \overline{DE}$.

Zusammenfassend ergibt sich aus den Gleichungen (1) – (4):

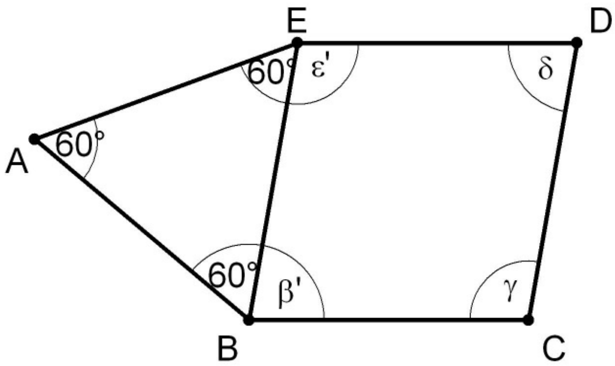
$\overline{AB} = \overline{AE} = \overline{BC} = \overline{CD} = \overline{DE}$.

Alle fünf Seiten im Fünfeck ABCDE sind gleich lang und die Behauptung ist bewiesen.




Da $\alpha = 60°$ und $\overline{AE} = \overline{AB}$ (siehe (1)), ist das Dreieck ABE ein gleichschenkliges Dreieck mit den Innenwinkel 60° an der Spitze. Die Basiswinkel des Dreiecks ABE müssen daher ebenfalls 60° weit sein, das Dreieck ABE ist somit gleichseitig.

Im Viereck BCDE sind somit alle vier Seiten gleich lang, es handelt sich um eine Raute. Insbesondere sind die Strecken $\overline{BC}$ und $\overline{ED}$ parallel. Es folgt $\delta = 180° - \gamma$ (Nebenwinkel und Stufenwinkel), $\varepsilon' = \gamma$ und $\beta' = \delta$.



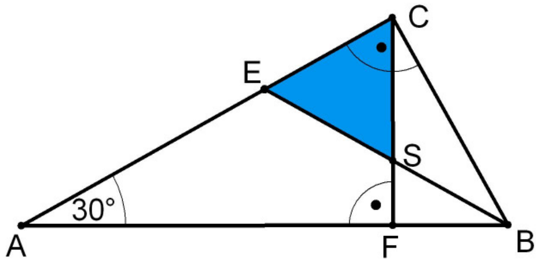

Aus $\varepsilon' + 60° = \varepsilon = 160°$ folgt nun $\varepsilon' = 100° = \gamma$, $\delta = 180° - \gamma = 80°$ und $\beta = \beta' + 60° = \delta + 60° = 140°$.

Damit sind alle Innenwinkel eines Fünfecks bestimmt.

### *Aufgabe 3*

*Das Dreieck ABE ist gleichschenklig mit der Basis $\overline{AB}$.*

*Bestimme den Anteil der Fläche des Dreiecks ESC an der Fläche des Dreiecks ABC.*




### *Lösung:*

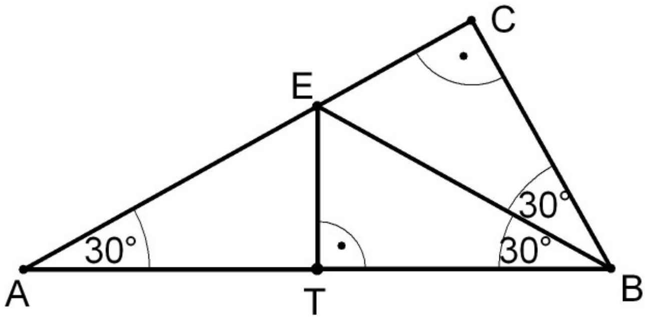
Der Anteil der Fläche des Dreiecks ESC an der Fläche des Dreiecks ABC beträgt **ein Sechstel**.

### *1. Beweisvorschlag:*

Sei T der Mittelpunkt der Strecke AB. Da das Dreieck ABE gleichschenklig ist, ist die Gerade ET Mittelsenkrechte im Dreieck ABE.

#### *1. Behauptung:*

Die Dreiecke ATE, ETB und BCE sind kongruent.




#### *Beweis der 1. Behauptung:*

Da ET Mittelsenkrechte ist, sind die Dreiecke ATE und ETB kongruent.

Für den Winkel $\sphericalangle CBA$ gilt nach dem Winkelsummensatz für das Dreieck ABC:
$\sphericalangle CBA = 180° - 90° - 30° = 60°$.
Somit ist $\sphericalangle CBE = 60° - 30° = 30°$.
Daraus folgt, dass die Dreiecke ETB und BCE nach dem Kongruenzsatz WWS kongruent sind: Sie haben die gemeinsame Seite EB, der anliegende Winkel beträgt jeweils 30°, der gegenüberliegende Winkel jeweils 90°.

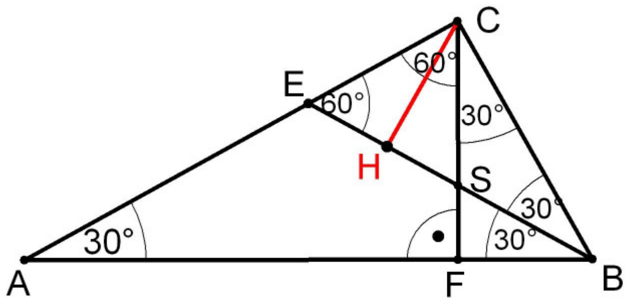
#### *2. Behauptung:*

Die Dreiecke ESC und SBC haben den gleichen Flächeninhalt.

#### *Beweis der 2. Behauptung:*

Es gelten die in der nebenstehenden Zeichnung eingetragenen Winkelweiten:

- $\sphericalangle CBE = \sphericalangle EBA = 30°$ wurde bereits oben begründet.
- $\sphericalangle FCB = 30°$ nach dem Winkelsummensatz im Dreieck BCF.
- $\sphericalangle ACF = 60°$, da $\sphericalangle FCB$ und $\sphericalangle ACF$ zusammen 90° ergeben.
- $\sphericalangle BEC = 60°$ nach dem Winkelsummensatz im Dreieck BCE.



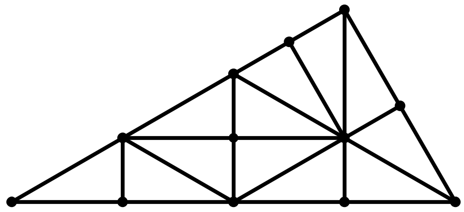

Damit ist Dreieck SBC gleichschenklig und Dreieck ESC sogar gleichseitig.
Insbesondere $\overline{SB} = \overline{SC} = \overline{ES}$.

Die Dreiecke ESC und SBC haben somit gleich lange Grundseiten $\overline{ES}$ bzw. $\overline{SB}$ und die gleiche zugehörige Höhe $\overline{CH}$. Sie haben somit den gleichen Flächeninhalt, wodurch die 2. Behauptung bewiesen ist.

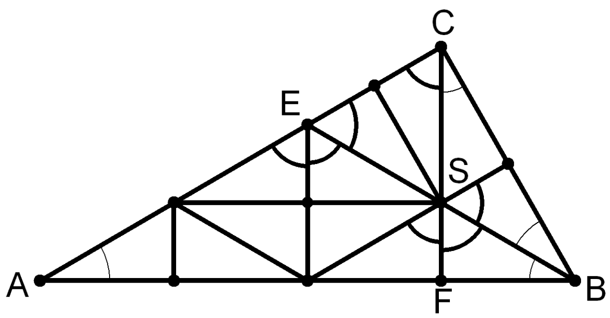
Aus der 1. Behauptung folgt, dass das Dreieck BCE ein Drittel des Flächeninhalts des Ausgangsdreiecks ABC hat. Aus der 2. Behauptung folgt, dass das Dreieck ESC die Hälfte des Flächeninhalts des Dreiecks BCE hat. Der Anteil der Fläche des Dreiecks ESC an der Fläche des Dreiecks ABC beträgt also ein Sechstel.

## *2. Beweisvorschlag:*

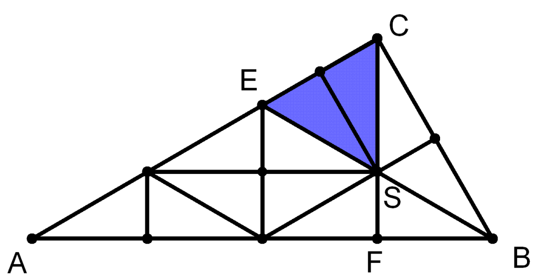
Das Ausgangsdreieck ABC hat die Innenwinkel 90°, 60°, 30°, es ist also ein halbes gleichseitiges Dreieck.
Wir verwenden 12 kongruente, kleine Dreiecke mit den Innenwinkeln 30°, 60° und 90°, die wie in der folgenden Abbildung aneinandergelegt werden:



Durch die vorgegebenen Innenwinkel der kleinen Dreiecke und da sie kongruent sind, ergibt sich unmittelbar, dass die Linien an allen inneren und äußeren Enden knickfrei ineinander übergehen. Z.B. sind die drei markierten Winkel bei S und E je 60°, zusammen also 180°, so dass hier beim Zusammenlegen kein Knick entsteht.




Außerdem ergibt sich unmittelbar, dass das große Dreieck ABC ebenfalls die Innenwinkel 30°, 60° und 90° hat mit einem rechten Winkel bei C. Das Dreieck ABE ist gleichschenklig, da die kleinen Dreiecke alle kongruent sind. Es liegt also die in der Aufgabe beschriebene Situation vor. S ist der Schnittpunkt der Strecken $\overline{CF}$ und $\overline{BE}$.




Das markierte Dreieck ESC besteht nun aus zwei der 12 Dreiecke, der Flächenanteil ist also $\frac{2}{12} = \frac{1}{6}$.

## Aufgabe 4

*Die von Null verschiedenen Zahlen $z_1$ und $z_2$ sind die Startzahlen einer Zahlenfolge. Die weiteren Zahlen werden folgendermaßen gebildet: $z_3 = z_2 : z_1$, $z_4 = z_3 : z_2$, ...*

*Zeige: Das Produkt von 2009 aufeinander folgenden Zahlen dieser Folge ist immer eine Zahl der Folge.*

### Beispiel:

Die beiden Startzahlen seien $z_1 = 2$ und $z_2 = 5$.

Dann $z_3 = \frac{z_2}{z_1} = \frac{5}{2} = 2{,}5$; $z_4 = \frac{z_3}{z_2} = \frac{2{,}5}{5} = 0{,}5$; $z_5 = \frac{z_4}{z_3} = \frac{0{,}5}{2{,}5} = 0{,}2$; $z_6 = \frac{z_5}{z_4} = \frac{0{,}2}{0{,}5} = 0{,}4$;

$z_7 = \frac{z_6}{z_5} = \frac{0{,}4}{0{,}2} = 2 = z_1$; $z_8 = \frac{z_7}{z_6} = \frac{2}{0{,}4} = 5 = z_2$; $z_9 = \frac{z_8}{z_7} = \frac{5}{2} = 2{,}5 = z_3$; $z_{10} = \frac{z_9}{z_8} = \frac{2{,}5}{5} = 0{,}5 = z_4$;...

Man erkennt, dass die in der Folge vorkommenden Zahlen nach sechs Zahlen wieder von vorne beginnen: 2; 5; 2,5; 0,5; 0,2; 0,4;   2; 5; 2,5; 0,5; 0,2; 0,4;   2; 5; 2,5; 0,5; 0,2; 0,4;   usw.
Sechs aufeinanderfolgende Zahlen der Folge bestehen also immer genau aus den Zahlen 2; 5; 2,5; 0,5; 0,2; 0,4. Ihr Produkt ist $2 \cdot 5 \cdot 2{,}5 \cdot 0{,}5 \cdot 0{,}2 \cdot 0{,}4 = 1$.
Da 2004 durch 6 teilbar ist, ist das Produkt von 2004 aufeinanderfolgenden Zahlen der Folge ebenfalls 1. Das Produkt der 2009 Zahlen ist also das Produkt der letzten fünf Zahlen. Unter diesen fünf Zahlen kommt eine der sechs Zahlen 2; 5; 2,5; 0,5; 0,2; 0,4 nicht vor, z.B. 2,5. Das Produkt der fünf anderen Zahlen ist $2 \cdot 5 \cdot 0{,}5 \cdot 0{,}2 \cdot 0{,}4 = 0{,}4$. Diese Zahl kommt in der Folge vor.

### 1. Beweisvorschlag:

Wie im Beispiel muss man allgemein zeigen, dass sich in der Folge sechs Zahlen immer wieder holen, deren Produkt 1 ist, so dass es nur auf die letzten fünf der aufeinanderfolgenden Zahlen ankommt.
Sei $z_1 = a$ und $z_2 = b$.
Dann ergibt sich:

$z_3 = z_2 : z_1 = \frac{b}{a}$; $z_4 = z_3 : z_2 = \frac{b}{a} : b = \frac{b}{a} : \frac{b}{1} = \frac{b}{a} \cdot \frac{1}{b} = \frac{1}{a}$; $z_5 = z_4 : z_3 = \frac{1}{a} : \frac{b}{a} = \frac{1}{a} \cdot \frac{a}{b} = \frac{1}{b}$;

$z_6 = z_5 : z_4 = \frac{1}{b} : \frac{1}{a} = \frac{1}{b} \cdot \frac{a}{1} = \frac{a}{b}$; $z_7 = z_6 : z_5 = \frac{a}{b} : \frac{1}{b} = \frac{a}{b} \cdot \frac{b}{1} = a$; $z_8 = z_7 : z_6 = a : \frac{a}{b} = \frac{a}{1} \cdot \frac{b}{a} = b$;...

Man erkennt, dass die in der Folge vorkommenden Zahlen nach sechs Zahlen wieder von vorne beginnen: a; b; $\frac{b}{a}$; $\frac{1}{a}$; $\frac{1}{b}$; $\frac{a}{b}$;  a; b; $\frac{b}{a}$; $\frac{1}{a}$; $\frac{1}{b}$; $\frac{a}{b}$;  a; b; $\frac{b}{a}$; $\frac{1}{a}$; $\frac{1}{b}$; $\frac{a}{b}$;....usw.
Sechs aufeinanderfolgende Zahlen der Folge bestehen also immer genau aus den Zahlen a; b; $\frac{b}{a}$; $\frac{1}{a}$; $\frac{1}{b}$; $\frac{a}{b}$ (natürlich nicht unbedingt beginnend mit a). Ihr Produkt ist $a \cdot b \cdot \frac{b}{a} \cdot \frac{1}{a} \cdot \frac{1}{b} \cdot \frac{a}{b} = 1$.
Da $2004 = 6 \cdot 334$ durch 6 teilbar ist, ist das Produkt von 2004 aufeinanderfolgenden Zahlen der Folge ebenfalls 1, denn 2004 aufeinanderfolgende Zahlen bestehen aus 334 solchen Sechserpäckchen.
Das Produkt von 2009 aufeinanderfolgenden Zahlen der Folge ist also gleich dem Produkt der letzten fünf dieser aufeinanderfolgenden Zahlen: Das Produkt der ersten 2004 Zahlen ist ja 1.
Die letzten fünf Zahlen bestehen aus fünf der Zahlen a; b; $\frac{b}{a}$; $\frac{1}{a}$; $\frac{1}{b}$; $\frac{a}{b}$. Genau eine dieser Zahlen fehlt.
Wir schreiben $u_1$, $u_2$, $u_3$, $u_4$, $u_5$ für diese letzten fünf der aufeinanderfolgenden Zahlen und x für die noch fehlende Zahl. Dann ist $u_1 \cdot u_2 \cdot u_3 \cdot u_4 \cdot u_5 \cdot x = a \cdot b \cdot \frac{b}{a} \cdot \frac{1}{a} \cdot \frac{1}{b} \cdot \frac{a}{b} = 1$, also
$u_1 \cdot u_2 \cdot u_3 \cdot u_4 \cdot u_5 = \frac{1}{x}$. Somit ist das Produkt der letzten fünf Zahlen gerade der Kehrwert der fehlenden Zahl.

Für jede Zahl x unter den Zahlen a; b; $\frac{b}{a}$; $\frac{1}{a}$; $\frac{1}{b}$; $\frac{a}{b}$ kommt aber auch der Kehrwert $\frac{1}{x}$ unter den Zahlen a; b; $\frac{b}{a}$; $\frac{1}{a}$; $\frac{1}{b}$; $\frac{a}{b}$ wieder vor, wie man direkt überprüfen kann.
Somit kommt das Produkt von 2009 aufeinanderfolgenden Zahlen in der Folge vor.

### *2. Beweisvorschlag:*

Die 2009 aufeinanderfolgenden Zahlen der Zahlenfolge seien
$z_{n+1} = u_1$, $z_{n+2} = u_2$, … , $z_{n+2009} = u_{2009}$.
Sei $u_1 = a$ und $u_2 = b$.
Dann ergibt sich:
$u_3 = u_2 : u_1 = \frac{b}{a}$; $u_4 = u_3 : u_2 = \frac{b}{a} : b = \frac{1}{a}$; $u_5 = u_4 : u_3 = \frac{1}{a} : \frac{b}{a} = \frac{1}{b}$; $u_6 = u_5 : u_4 = \frac{1}{b} : \frac{1}{a} = \frac{a}{b}$;
$u_7 = u_6 : u_5 = \frac{a}{b} : \frac{1}{b} = a$; $u_8 = u_7 : u_6 = a : \frac{a}{b} = b$;…
Man erkennt, dass unter den 2009 aufeinanderfolgenden Zahlen nur sechs Zahlen vorkommen, die sich immer wiederholen:
a; b; $\frac{b}{a}$; $\frac{1}{a}$; $\frac{1}{b}$; $\frac{a}{b}$; a; b; $\frac{b}{a}$; $\frac{1}{a}$; $\frac{1}{b}$; $\frac{a}{b}$; a; b; $\frac{b}{a}$; $\frac{1}{a}$; $\frac{1}{b}$; $\frac{a}{b}$;….usw.
Da $2009 = 6 \cdot 334 + 5$ folgen nach 334 solcher Sechserpäckchen unter den aufeinanderfolgenden Zahlen die letzten fünf der aufeinanderfolgenden Zahlen:
$u_{2005} = a; u_{2006} = b; u_{2007} = \frac{b}{a}; u_{2008} = \frac{1}{a}; u_{2009} = \frac{1}{b}$.
Das Produkt der Zahlen eines solchen Sechserpäckchens ist $a \cdot b \cdot \frac{b}{a} \cdot \frac{1}{a} \cdot \frac{1}{b} \cdot \frac{a}{b} = 1$.
Also ist das Produkt der ersten 2004 der aufeinanderfolgenden Zahlen ebenfalls 1, denn es wiederholen sich ja nur die ersten sechs Zahlen : a; b; $\frac{b}{a}$; $\frac{1}{a}$; $\frac{1}{b}$; $\frac{a}{b}$ insgesamt 334 mal. Das Produkt der 2009 aufeinanderfolgenden Zahlen der Folge ist also das Produkt der letzten fünf Zahlen, d.h. $\underbrace{u_1 \cdot u_2 \cdot u_3 \cdot \ldots \cdot u_{2004}}_{1} \cdot u_{2005} \cdot u_{2006} \cdot u_{2007} \cdot u_{2008} \cdot u_{2009} = a \cdot b \cdot \frac{b}{a} \cdot \frac{1}{a} \cdot \frac{1}{b} = \frac{b}{a}$.

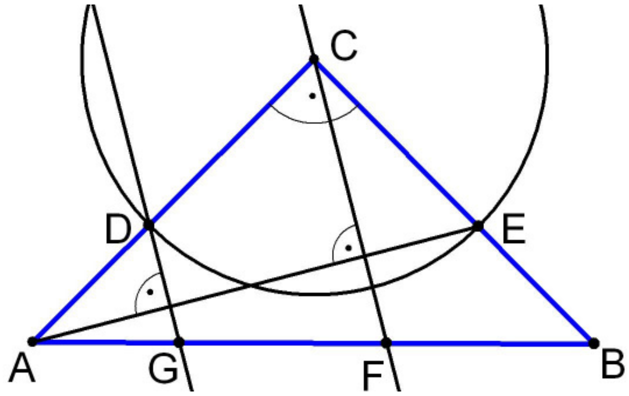
Da $\frac{b}{a} = u_3 = z_{n+3}$ kommt das Produkt also in der Folge vor.

### Aufgabe 5

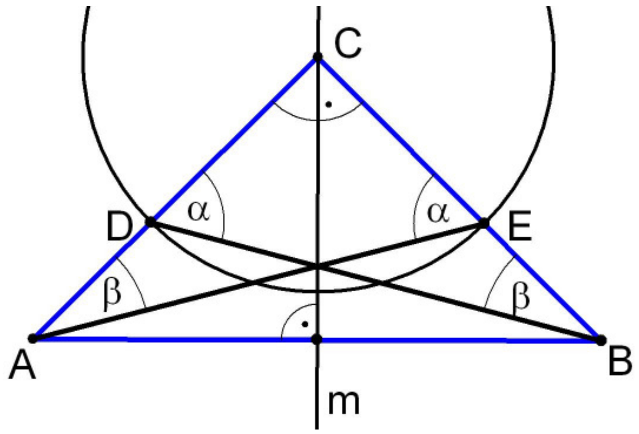
*Im gleichschenklig rechtwinkligen Dreieck ABC ($\gamma = 90°$) schneidet ein Kreis um C die Kathete $\overline{CA}$ in D und die Kathete $\overline{CB}$ in E. Die Senkrechten von C und D auf die Gerade AE schneiden die Hypotenuse $\overline{AB}$ in den Punkten F bzw. G.*
*Zeige: Die Strecken $\overline{GF}$ und $\overline{FB}$ sind gleich lang.*

**1. Beweisvorschlag:** (Mit Spiegelung)
Die nebenstehende Abbildung zeigt zunächst die Situation.

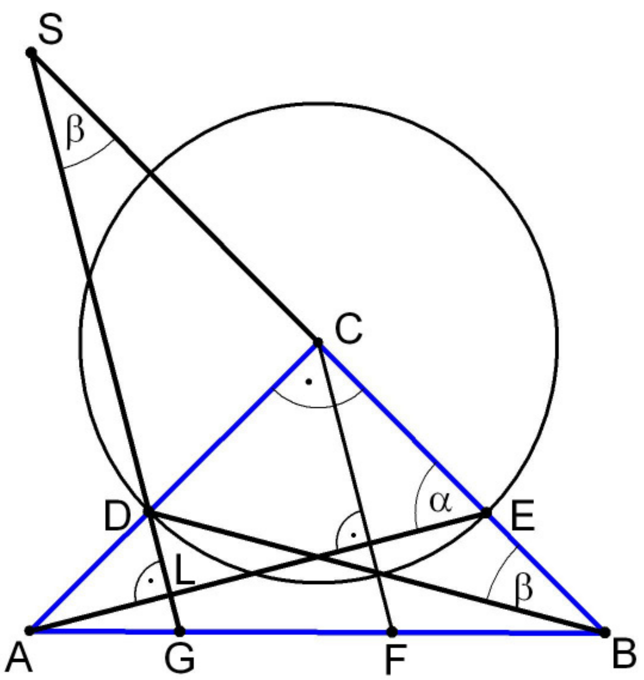
Zu zeigen ist, dass F der Mittelpunkt der Strecke $\overline{GB}$ ist.




Sei m die Mittelsenkrechte zur Basis $\overline{AB}$ des gleichschenkligen Dreiecks ABC. Der Kreis um C liegt symmetrisch zu m und damit auch die Punkte D und E. Das Dreieck AEC geht durch die Spiegelung an m in das Dreieck DBC über, die beiden Dreiecke sind also kongruent. Somit ist
$\beta = \sphericalangle EAC = \sphericalangle CBD$ und
$\alpha = \sphericalangle CEA = \sphericalangle BDC$.
Außerdem ist $\alpha + \beta = 90°$ (Winkelsumme im Dreieck AEC).




Sei S der Spiegelpunkt von B an C. Da $\gamma = 90°$ ist, ist die Gerade AC die Mittelsenkrechte zur Strecke $\overline{BS}$. Somit ist das Dreieck BSD gleichschenklig und daher sind die Basiswinkel $\beta = \sphericalangle CBD$ und $\sphericalangle DSC$ gleich.
Sei L der Schnittpunkt der Geraden DS mit AE. Nach der Winkelsumme im Dreieck ESL und wegen $\alpha + \beta = 90°$ ist $\sphericalangle ELS = 90°$, DS ist also orthogonal zu AE. Damit ist DS die in der Aufgabe beschrieben Senkrechte zu AE durch D.
Sie schneidet $\overline{AB}$ in G.
Da auch CF orthogonal zu AE ist, sind CF und SG parallel. Nach Konstruktion ist C der Mittelpunkt von $\overline{BS}$, somit ist CF Mittelparallele im Dreieck BSG.




Die Mittelparallele schneidet die Seite $\overline{GB}$ im Mittelpunkt. Somit ist F der Mittelpunkt von $\overline{GB}$. und die Aufgabe ist bewiesen.

**2. Beweisvorschlag:** (Mit Kongruenzsätzen)

Das Dreieck ABC ist gleichschenklig.

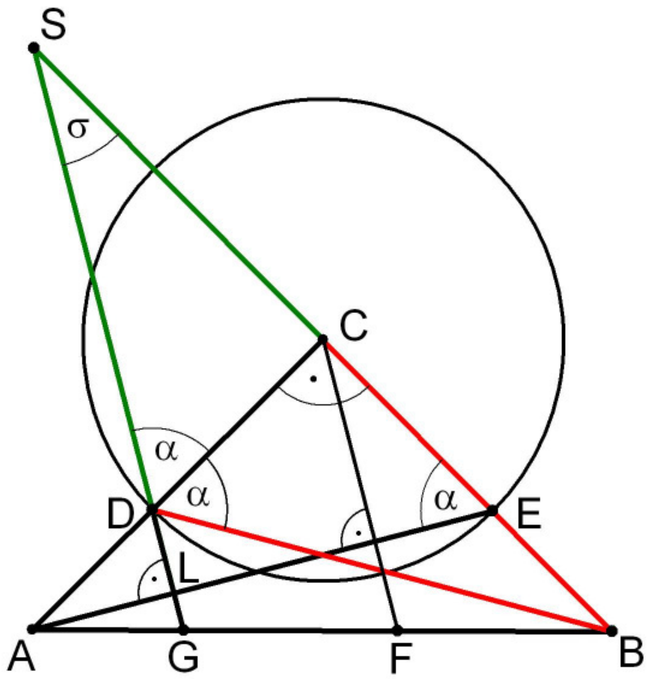
Deshalb sind die Strecken $\overline{AC}$ und $\overline{BC}$ gleich lang.

D und E liegen auf demselben Kreis um C.

Deshalb sind die Strecken $\overline{EC}$ und $\overline{DC}$ gleich lang.

Da die Dreiecke AEC und BCD zudem im Winkel rechten Winkel $\gamma = 90°$ übereinstimmen, sind sie nach dem Kongruenzsatz SWS kongruent und stimmen auch in den Winkeln $\sphericalangle CEA = \sphericalangle BDC = \alpha$ überein.

Sei S der Schnittpunkt der Geraden DG und BC und sei L der Schnittpunkt der Geraden DG und AE.




Die Winkel $\sphericalangle ELS$ und $\sphericalangle SCD$ sind rechte Winkel, da nach Voraussetzung DG Senkrechte zu AE ist bzw. $\gamma = 90°$ gilt. Da die Dreiecke DCS und ESL außer in diesen beiden rechten Winkeln auch noch im Winkel $\sphericalangle LSE = \sphericalangle DSC = \sigma$ übereinstimmen, sind auch ihre jeweils dritten Winkel gleich groß: Es gilt $\sphericalangle CDS = \sphericalangle SEL = \sphericalangle CEA = \alpha$.

Folglich gilt $\sphericalangle BDC = \alpha = \sphericalangle CDS$.

Da die Dreiecke BCD und SDC die Seite $\overline{DC}$ gemeinsam haben und in den anliegenden Winkeln $\sphericalangle BDC$ bzw. $\sphericalangle CDS$ und dem rechten Winkel übereinstimmen, sind sie nach dem Kongruenzsatz WSW kongruent.

Deshalb sind die Strecken $\overline{BC}$ und $\overline{CS}$ gleich lang. C ist also der Mittelpunkt der Strecke $\overline{BS}$.

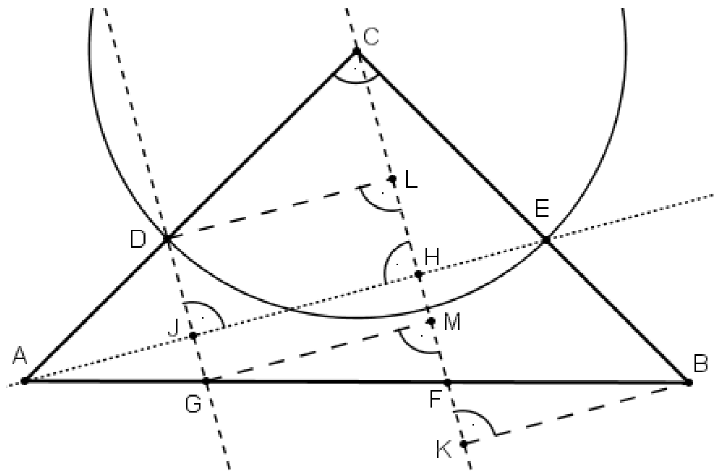
Da DG und CF senkrecht auf AE stehen, sind sie parallel.

CF ist daher Mittelparallele im Dreieck SGB und halbiert als solche die Seite $\overline{GB}$.

***3. Beweisvorschlag:*** (Mit Kongruenzsätzen)

Wir bezeichnen die Schnittpunkte der Senkrechten zu AE durch C und D mit H bzw. J.

Als Hilfsstrecken werden die Lote von B, D und G auf die Gerade CF eingezeichnet. Ihre Fußpunkte werden K, L bzw. M benannt.




Damit gilt Folgendes:

(1) $\left.\begin{array}{l} \overline{AC} = \overline{CB} \text{ (nach Vorgabe)} \\ \sphericalangle CHA = \sphericalangle BKC = 90^o \\ \sphericalangle ACH = 90^0 - \sphericalangle KCB = \sphericalangle CBK \end{array}\right\}$ Nach dem Kongruenzsatz SWW sind die Dreiecke AHC und CKB kongruent. Insbesondere $\overline{CH} = \overline{BK}$.

(2) $\left.\begin{array}{l} \overline{CD} = \overline{CE} \text{ (nach Vorgabe)} \\ \sphericalangle CLD = \sphericalangle EHC = 90^o \\ \sphericalangle DCL = 90^0 - \sphericalangle HCE = \sphericalangle HEC \end{array}\right\}$ Nach dem Kongruenzsatz SWW sind die Dreiecke DLC und CHE kongruent. Insbesondere $\overline{DL} = \overline{CH}$.

(3) Das Viereck DGML ist nach Vorgabe ein Rechteck. Folglich $\overline{DL} = \overline{GM}$.

(4) $\left.\begin{array}{l} \overline{GM} = \overline{BK} \text{ (nach (1), (2) und (3))} \\ \sphericalangle GMF = \sphericalangle BKM = 90^o \\ \sphericalangle MFG = \sphericalangle KFB \text{ (Scheitelwinkel)} \end{array}\right\}$ Nach dem Kongruenzsatz SWW sind die Dreiecke GFM und BFK kongruent. Insbesondere $\overline{GF} = \overline{FB}$..

## *Aufgabe 6*

*Ein Glücksspielautomat wählt zufällig einen Teiler der Zahl $2009^{2010}$ aus und zeigt seine Einerziffer an.*

*Auf welche Ziffer sollte ein Spieler setzen?*

### *Lösung:*

Die 1 ist die häufigste Einerziffer unter den Teilern von $2009^{2010}$. Also sollte man auf die 1 setzen.

### *Beweisvorschlag:*

#### *Vorbemerkung:*

Die Einerziffer des Produkts zweier Zahlen a und b ist die Einerziffer des Produkts der Einerziffer von a mit der Einerziffer von b.

#### *Begründung:*

Wenn $a_1$ die Einerziffer von a ist, so $a = a_2 \cdot 10 + a_1$. Analog gilt $b = b_2 \cdot 10 + b_1$ für die Einerziffer $b_1$ von b. Damit

$a \cdot b = (a_2 \cdot 10 + a_1) \cdot (b_2 \cdot 10 + b_1) = (a_2 \cdot b_2 \cdot 10 + a_2 \cdot b_1 + a_1 \cdot b_2) \cdot 10 + a_1 \cdot b_1$.

Die Einerziffer von $a \cdot b$ ist also die Einerziffer von $a_1 \cdot b_1$.

*Nun zum Beweis der Aufgabe.*

Die Zahl 2009 hat die Primfaktorzerlegung $7^2 \cdot 41$

Damit hat die Zahl $2009^{2010}$ die Primfaktorzerlegung $7^{4020} \cdot 41^{2010}$.

Ein Teiler der Zahl $2009^{2010}$ hat also die Form $7^m \cdot 41^n$ mit $0 \le m \le 4020$ und $0 \le n \le 2010$.

Nach der Vorbemerkung ist die Einerziffer von $41^n$ für alle n immer 1. Wieder nach der Vorbemerkung ist damit die Einerziffer von $7^m \cdot 41^n$ gerade die Einerziffer von $7^m$. Der Exponent m kann dabei 4021 verschiedene Werte annehmen.

Die Potenzen zur Basis 7 haben folgende Einerziffern:

Einerziffer von $7^0$: 1

Einerziffer von $7^1$: 7

Einerziffer von $7^2$: 9

Einerziffer von $7^3$: 3

Einerziffer von $7^4$: 1

Einerziffer von $7^5$: 7

usw.

Nach der Vorbemerkung wiederholen sich nun die Ziffern 1, 7, 9, 3, 1, 7, 9, 3 …, da die nächste Einerziffer aus der vorigen immer durch Multiplikation mit 7 hervorgeht.

- Die gezeigte Ziffer ist 1, wenn der Exponent m ein Vielfaches von 4 ist. Das geschieht in 1006 von 4021 möglichen Fällen.
- Die gezeigte Ziffer ist 7, wenn der Exponent bei der Division durch 4 den Rest 1 hat. Das geschieht in 1005 von 4021 möglichen Fällen.
- Die gezeigte Ziffer ist 9, wenn der Exponent bei der Division durch 4 den Rest 2 hat. Das geschieht in 1005 von 4021 möglichen Fällen.
- Die gezeigte Ziffer ist 3, wenn der Exponent bei der Division durch 4 den Rest 3 hat. Das geschieht in 1005 von 4021 möglichen Fällen, da 4020 durch 4 teilbar ist.

Somit kommt die 1 als Einerziffer am häufigsten vor.

Damit ist die Wahrscheinlichkeit, dass der Automat die Ziffer 1 anzeigt, ein klein wenig größer als dass er die Ziffern 3, 7 oder 9 anzeigt. Da er die übrigen Ziffern gar nicht anzeigt, sollte der Spieler auf die Ziffer 1 setzen.