Landeswettbewerb Mathematik

Baden-Württemberg

Lösungsvorschläge für die

Aufgaben der 2. Runde 2008/2009

Aufgabe 1

Eine Menge A enthält m aufeinander folgende ganze Zahlen; die Summe dieser Zahlen ist $2m$. Eine Menge B enthält $2m$ aufeinander folgende ganze Zahlen; die Summe dieser Zahlen ist m. Die größte Zahl aus A unterscheidet sich von der größten Zahl aus B dem Betrag nach um 1003.

Für welche m ist das möglich?

Lösung:

Die einzige Lösung der Aufgabe ist m = 2009.

1. Beweismöglichkeit:

Die kleinste Zahl der Menge A wird mit n+1, die kleinste Zahl der Menge B mit k+1 bezeichnet. Die Menge A enthält also die m Zahlen $n+1, n+2, \ldots, n+m$, die Menge B enthält die $2m$ Zahlen $k+1, k+2, \ldots, k+2m$.

Die Summe der m Zahlen von A ist nach Voraussetzung $2m$.

Aus dieser Bedingung der Aufgabe ergibt sich mit der Gaußschen Summenformel:

$$(n+1)+(n+2)+\ldots+(n+m)=n\cdot m+(1+2+\ldots+m)=n\cdot m+\frac{1}{2}m\cdot(m+1)=2m \qquad (1)$$

Die Summe der $2m$ von Zahlen von B ist nach Voraussetzung m.

Dies ergibt entsprechend:

$$(k+1)+(k+2)+\ldots+(k+2m)=2\cdot m\cdot k+\frac{1}{2}\cdot 2m\cdot(2m+1)=2\cdot m\cdot k+2\cdot m^2+m=m \qquad (2)$$

Die Gleichung (2) ist äquivalent zu $2m\cdot(k+m)=0$. Wegen $m\neq 0$ folgt hieraus $k+m=0$.

Die größte Zahl von A unterscheidet sich von der größten Zahl von B um 1003. Dies bedeutet also $|(k+2m)-(m+n)|=1003$.

Aus $k+m=0$ folgt hieraus $|(k+2m)-(m+n)|=|k+m-n|=|n|=1003$.

Somit ist $n=+1003$ oder $n=-1003$.

Dividiert man (1) durch $m \neq 0$ so erhält man $n+\frac{m+1}{2}=2$. Mit $n=+1003$ oder $n=-1003$ ergibt sich daraus $1003+\frac{m+1}{2}=2$ oder $-1003+\frac{m+1}{2}=2$. Aus der ersten Gleichung ergibt sich $m=-2003$, aus der zweiten Gleichung ergibt sich $m=+2009$.

Da aber m größer als 0 sein muss (m ist die Anzahl der Elemente von A), kommt nur $m=+2009$ als Lösung in Frage.

Wir überprüfen, dass sich für $m=2009$ tatsächlich eine Lösung ergibt.
Zu $m=2009$ gehört $n=-1003$ und $k=-m=-2009$.
Somit enthält A die 2009 aufeinanderfolgenden Zahlen $-1002,-1001,\ldots,1005,1006$.
und B die 4018 aufeinanderfolgenden Zahlen $-2008,-2007,\ldots,2008,2009$.
Die Summe der Zahlen aus A ist

$$2009\cdot(-1003)+\frac{1}{2}\cdot 2009\cdot 2010=4018=2\cdot 2009=2m,$$

die Summe der Zahlen aus B ist $4018\cdot(-2009)+\frac{1}{2}\cdot 4018\cdot 4019=2009=m$.

Somit ergibt sich für $m=2009$ eine Lösung.

2. Beweismöglichkeit:

Behauptung:

Die Summe S von m aufeinanderfolgenden Zahlen $x, x+1, \ldots, x+m-1$ berechnet sich, indem man den kleinsten Summanden und den größten Summanden addiert, das Ergebnis dann mit der Anzahl der Summanden multipliziert und das Produkt schließlich durch 2 teilt. Es ist also

$$S=x+(x+1)+\ldots+(x+m-1)=\frac{1}{2}\cdot(2x+m-1)\cdot m.$$

Beweis der Behauptung:

Es ergibt sich durch umsortieren der Summanden:

$$\begin{aligned}2S &= x+(x+1)+\ldots+(x+m-1)+x+(x+1)+\ldots+(x+m-1)\\ &= [x+(x+m-1)]+[(x+1)+(x+m-2)]+\ldots+[(x+m-1)+x]\end{aligned}$$

Hier hat jeder der m Summanden in den eckigen Klammern den Wert $2x+m-1$.

Somit $2S=(2x+m-1)\cdot m$. Damit ergibt sich die behauptete Formel

$$S=\frac{1}{2}\cdot(2x+m-1)\cdot m.$$

Nun zurück zum Beweis der Aufgabe. Die kleinste Zahl aus A wird mit x, die kleinste Zahl aus B mit y bezeichnet. Somit enthält A die m Zahlen $x, x+1, \ldots, x+m-1$, B enthält die 2m Zahlen $y, y+1, \ldots, y+2m-1$.

Wir schreiben s(A) für die Summe aller Zahlen von A und s(B) für die Summe aller Zahlen von B.

Dann gilt nach der Behauptung und der Aufgabenstellung:

$$s(A)=x+(x+1)+\ldots+(x+m-1)=\frac{1}{2}\cdot(2x+m-1)\cdot m=2m \qquad (1)$$

$$s(B)=y+(y+1)+\ldots+(y+2m-1)=\frac{1}{2}\cdot(2y+2m-1)\cdot 2m=m \qquad (2)$$

$$\left|(y+2m-1)-(x+m-1)\right|=\left|y-x+m\right|=1003 \qquad (3)$$

Aus (1) folgt $2x+m-1=4$ oder $2x+m=5$.

Auf der rechten Seite dieser Gleichung steht eine ungerade Zahl. Da 2x gerade ist, muss m ungerade sein. Somit ist $m=2k+1$ für eine natürliche Zahl k. Es ergibt sich $2x+m=2x+(2k+1)=5$, also $x=2-k$.

Aus (2) folgt analog $2y+2m-1=1$ oder $y+m=1$. Aus $m=2k+1$ folgt hieraus $y=-2k$.

Eingesetzt in (3) ergibt sich $\left|y-x+m\right|=\left|-2k-(2-k)+(2k+1)\right|=\left|k-1\right|=1003$.

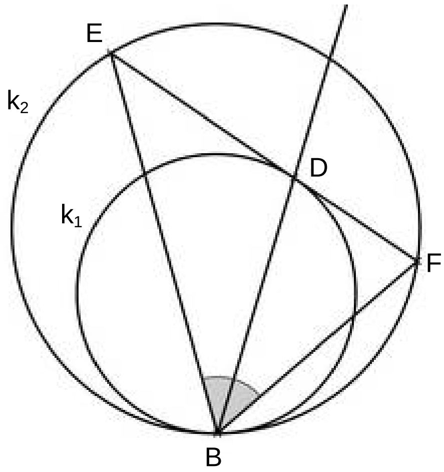
Da k positiv ist, folgt somit $k=1004$. Also ist $x=2-k=-1002$, $y=-2k=-2008$ und $m=2k+1=2009$.

Wie in der ersten Beweismöglichkeit rechnet man nach, dass sich für $m=2009$ tatsächlich eine Lösung der Aufgabe ergibt.

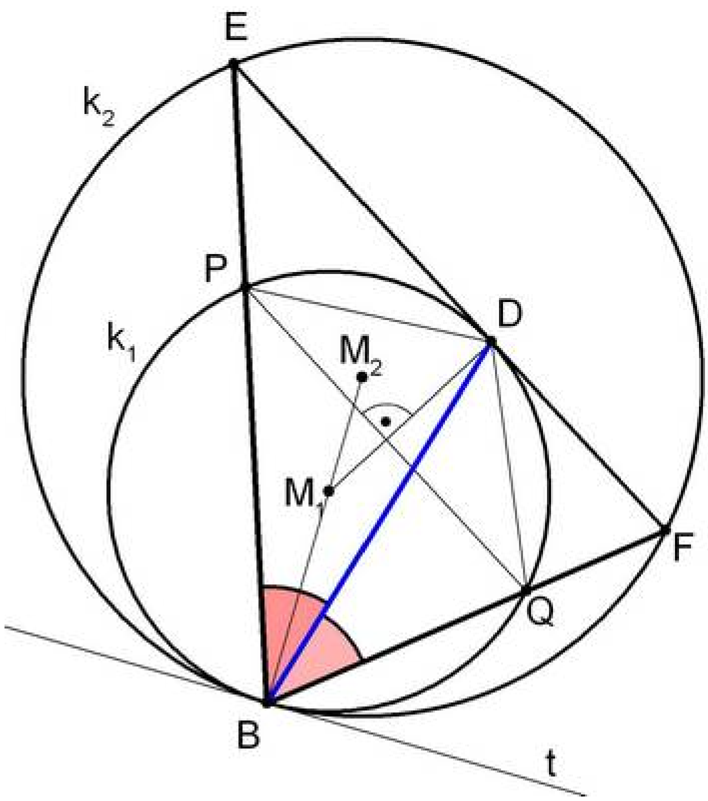
Aufgabe 2

Der Kreis k_1 berührt den Kreis k_2 von innen im Punkt B.
Eine Sehne $\overline{EF}$ des Kreises k_2 berührt k_1 im Punkt D.

Zeige: BD halbiert den Winkel $\sphericalangle FBE$.



1. Beweismöglichkeit (mit zentrischer Streckung und Umfangswinkelsatz):



Seien M_1 bzw. M_2 die Mittelpunkte der Kreise k_1 bzw. k_2. Der Punkt P sei der (von B verschiedene) Schnittpunkt der Geraden BE mit k_1, Q der (von B verschiedene) Schnittpunkt der Geraden BF mit k_1.

Nach Aufgabenstellung berühren sich die Kreise k_1 und k_2 im Punkt B, es gibt also in B eine gemeinsame Tangente t an beide Kreise. Die Radien $\overline{M_1B}$ von k_1 und $\overline{M_2B}$ von k_2 sind beide orthogonal zur Tangente t, also liegen die Punkte B, M_1 und M_2

auf einer Geraden. Somit gibt es eine zentrische Streckung z mit Streckzentrum B, die M_1 auf M_2 abbildet. Die Abbildung z bildet k_1, den Kreis mit Mittelpunkt M_1 durch B, auf den Kreis mit Mittelpunkt M_2 durch B, also auf k_2 ab.

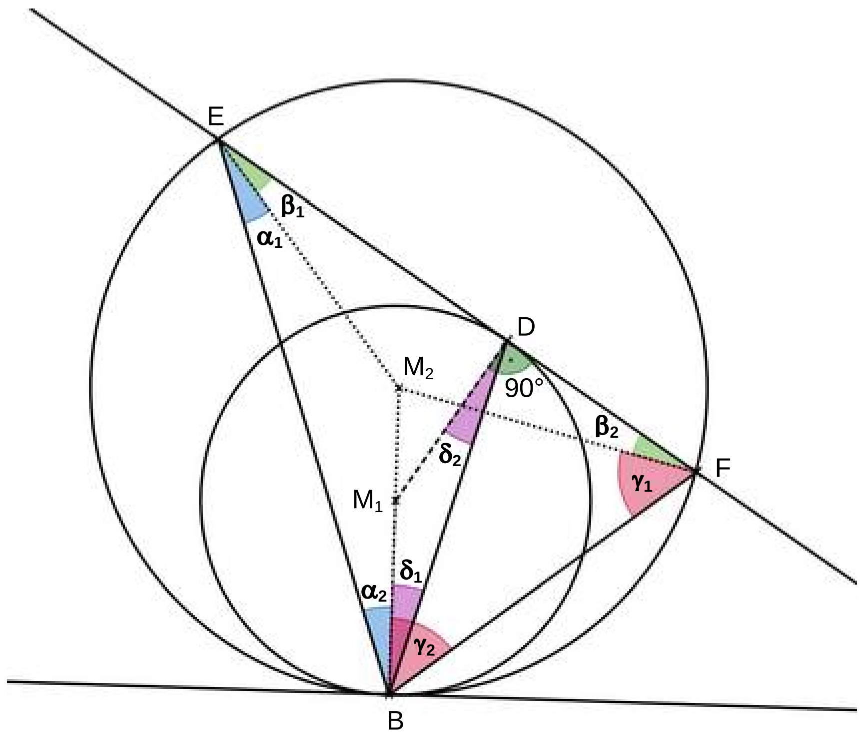
Durch z wird P auf E und Q auf F abgebildet, denn die Geraden PE und QF verlaufen beide durch das Streckzentrum B und P, Q liegen auf k_1, E, F sind die entsprechenden Punkte auf $z(k_1) = k_2$. Also wird die Gerade PQ auf die Gerade EF abgebildet. Bei einer zentrischen Streckung ist eine Gerade zu ihrer Bildgerade parallel, deshalb ist PQ zu EF parallel.

Der Radius $\overline{M_1D}$ von k_1 ist senkrecht zur Tangente an k_1 in D, also senkrecht zur Geraden EF. Da PQ und EF parallel sind, ist $\overline{M_1D}$ auch senkrecht zu PQ. Wegen $\overline{M_1P} = \overline{M_1Q}$ ist M_1D sogar die Mittelsenkrechte zu $\overline{PQ}$. Folglich ist $\overline{PD} = \overline{QD}$. Somit sind die Sehnen $\overline{PD}$ und $\overline{QD}$ gleich lange Sehnen im Kreis k_1.

Nach dem Umfangswinkelsatz sind die entsprechenden Umfangswinkel zu gleich langen Sehnen in einem Kreis gleich weit. Es folgt also $\sphericalangle QBD = \sphericalangle DBP$. Somit ist BD Winkelhalbierende von $\sphericalangle FBE$. Dies war zu zeigen.

2. Beweismöglichkeit (mit gleichschenkligen Dreiecken):

Die folgenden Bezeichnungen beziehen sich auf die folgende Zeichnung.



M_1 sei der Mittelpunkt von k_1, M_2 sei der Mittelpunkt von k_2.
Die Winkel α_1 und α_2, β_1 und β_2, γ_1 und γ_2 und δ_1 und δ_2 sind als Basiswinkel in den von jeweils zwei gleichen Radien und einer Sehne gebildeten gleichschenkligen Dreiecken gleich groß. Deshalb werden sie im folgenden kurz α, β, γ und δ genannt.

Im Dreieck BFE gilt: $2\cdot(\alpha+\beta+\gamma)=180°$, also $\alpha+\beta+\gamma=90°$.

Daraus folgt: $\beta = 90° - \alpha - \gamma$. (1)

Im Dreieck BFD gilt: $(\gamma-\delta)+(\gamma+\beta)+(90°-\delta)=180°$, also $\beta+2\gamma-2\delta=90°$.

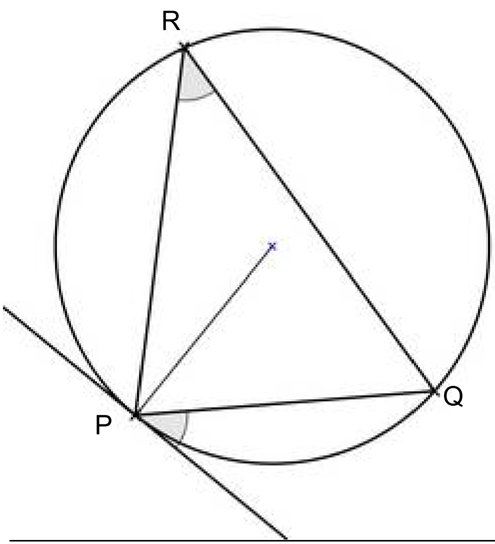
Daraus folgt: $\gamma-\delta = 90° - \gamma + \delta - \beta$. (2)

Setzt man β aus (1) in (2) ein, ergibt sich $\gamma-\delta=\alpha+\delta$.

Damit gilt: $\sphericalangle FBD = \sphericalangle DBE$ und BD halbiert den Winkel $\sphericalangle FBE$.

- Ist der Durchmesser des Kreises k_1 kleiner als der Radius des Kreises k_2, sind Änderungen in den Winkelbeziehungen erforderlich, die dann zu einer analogen Argumentation führen.
- Liegt M_2 auf der Strecke EF erhält man mit obiger Argumentation (unter Beachtung von $\beta_1 = \beta_2 = 0°$) ebenfalls das gewünschte Ergebnis.
- Liegt der Punkt D "links von M_2", erhält man das gewünschte Ergebnis mit gleicher Argumentation durch eine geeignete Umbenennung der Winkel.

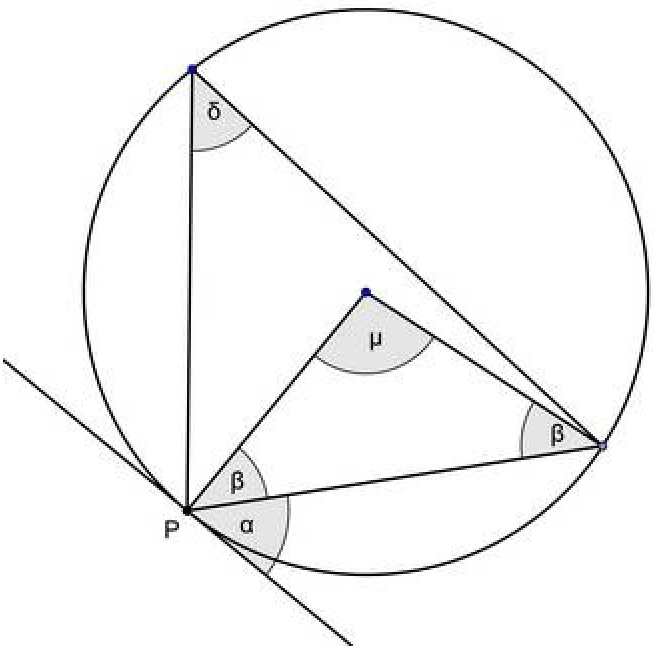
3. Beweismöglichkeit (mit Tangentenabschnitten und Sehnen-Tangenten-Winkel-Satz):



Vorbemerkung (Sehnen-Tangenten-Winkel-Satz):

Im Kreis k ist der Winkel zwischen der Sehne $\overline{PQ}$ und der Tangente im Punkt P stets so groß wie der Umfangswinkel $\sphericalangle PRQ$ auf dem gegenüberliegenden Bogen.

Beweis der Vorbemerkung:



Der Umfangswinkel $\sphericalangle PRQ$ ist bekanntlich halb so groß wie der zugehörige Mittelpunktswinkel $\sphericalangle PMQ$, es gilt also $\mu = 2\delta$.

Im gleichschenkligen Dreieck PQM ist $\mu = 180° - 2\beta$. Da der Radius $\overline{MP}$ senkrecht auf der Tangente steht, ist $\beta = 90° - \alpha$.

Eingesetzt in $\mu = 180° - 2\beta$ folgt daraus

$\mu = 180° - 2(90° - \alpha) = 2\alpha$.

Aus $\mu = 2\delta$ folgt nun $\alpha = \delta$.

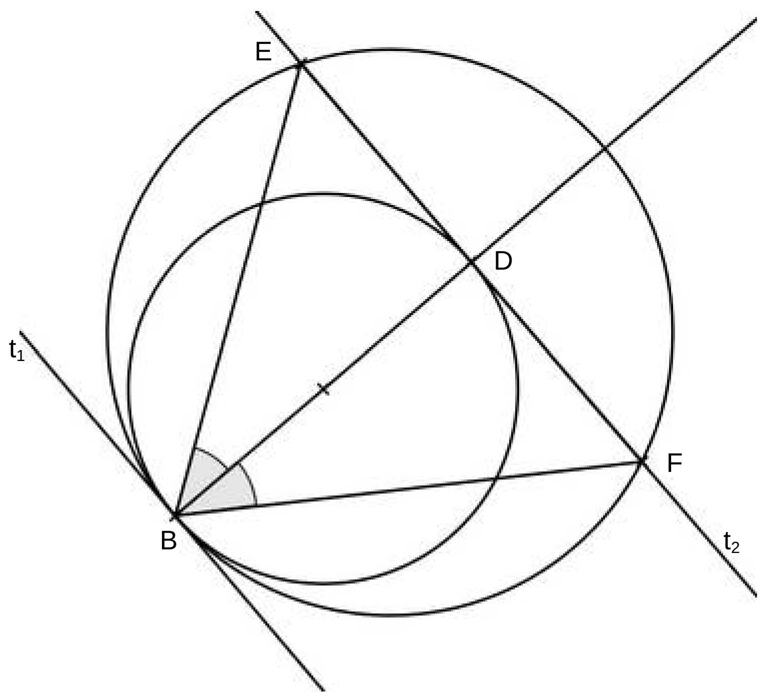
Das ist die Behauptung.

Nun zum eigentlichen Beweis der Aufgabe.

Fall a:

Die Tangente t_1 in B an k_1 ist parallel zur Tangente t_2 an k_1 in D.

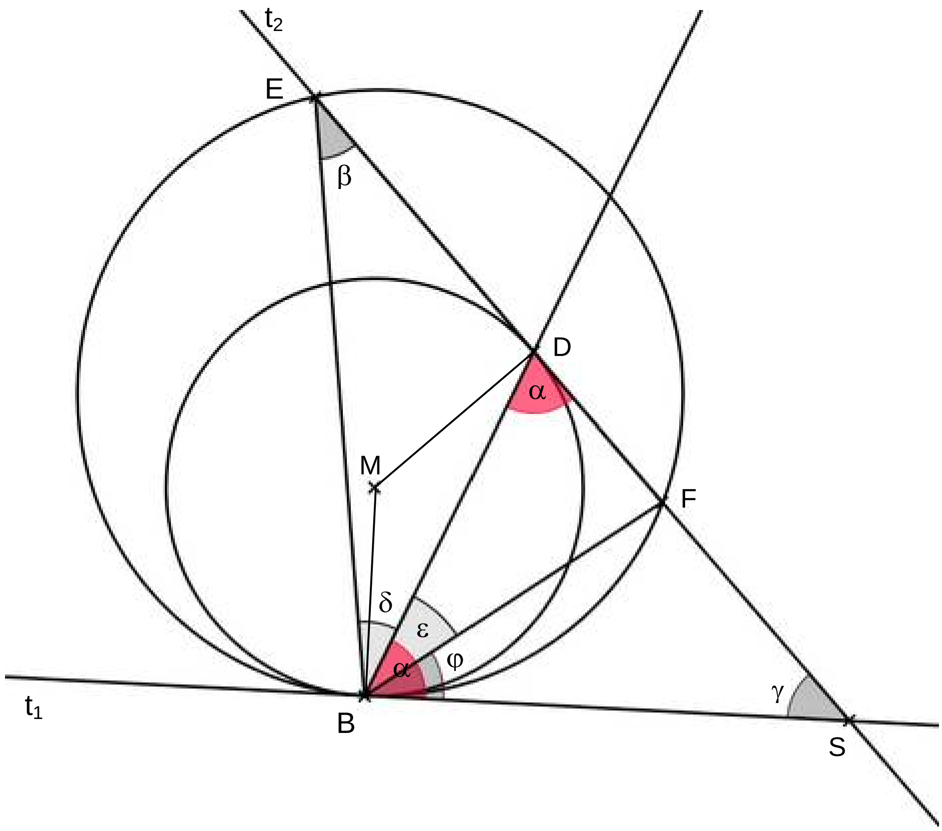
Dann ist BD ist Spiegelachse der Kreisfigur und halbiert deshalb den Winkel $\sphericalangle FBE$.



Fall b:

Die Tangenten t_1 und t_2 schneiden sich im Punkt S.

Da die Tangenten senkrecht auf den Radien $\overline{MD}$ und $\overline{MB}$ stehen und da das Dreieck BDM gleichschenklig ist, sind auch die Winkel $\sphericalangle BDS$ und $\sphericalangle SBD$ gleich weit, in der untenstehenden Zeichnung sind sie durch α bezeichnet.



Der Winkel φ ist Sehnen-Tangenten-Winkel (vgl. Abbildung), aus der Vorbemerkung folgt deshalb $\varphi = \beta$.

Aus dem Winkelsummensatz für das Dreieck BDE folgt: $\delta + (180° - \alpha) + \beta = 180°$,

d.h. $\alpha = \beta + \delta$.

Aus $\varphi = \beta$ und $\alpha = \varphi + \varepsilon$ ergibt sich nun $\alpha = \varphi + \delta = \varphi + \varepsilon$. Somit folgt $\varepsilon = \delta$.

Dies bedeutet genau, dass BD den Winkel $\sphericalangle FBE$ halbiert.

Aufgabe 3

Auf einem Tisch liegt ein Haufen mit 1000 Streichhölzern. Anna und Bernd spielen folgendes Spiel:
Sie müssen von diesem Haufen abwechselnd Streichhölzer wegnehmen, wobei jeweils die Zahl der weggenommenen Streichhölzer eine Zweierpotenz (1, 2, 4, 8, ...) sein muss.
Wer das letzte Streichholz wegnimmt, hat verloren. Anna beginnt.
Wer von beiden kann den Sieg erzwingen?

Lösung:

Bernd kann den Sieg erzwingen.

Beweis:

Statt für 1000 Streichhölzer untersuchen wir das Spiel zunächst für kleine Anzahlen n von Streichhölzern.

- n = 1: Anna muss das Streichholz nehmen. Daher gewinnt **Bernd**.
- n = 2: Anna kann ein Streichholz nehmen und zwingt Bernd, das letzte Streichholz zu nehmen. **Anna** kann also sicher gewinnen.
- n = 3: Anna kann zwei Streichhölzer nehmen und zwingt Bernd, das letzte Streichholz zu nehmen. **Anna** kann also sicher gewinnen.
- n = 4: Es gibt drei mögliche Fälle:
  (1) Anna nimmt alle vier Streichhölzer und verliert damit.
  (2) Anna nimmt zwei Streichhölzer. Dann kann Bernd ein Streichholz nehmen und zwingt Anna somit, das letzte Streichholz zu nehmen.
  (3) Anna nimmt ein Streichholz. Dann kann Bernd zwei Streichhölzer nehmen und zwingt Anna somit, das letzte Streichholz zu nehmen.
  In allen drei Fällen kann also **Bernd** den Sieg erzwingen.

Behauptung:

a) Bernd kann den Sieg erzwingen, wenn n bei Division durch 3 den Rest 1 lässt.

b) Anna kann den Sieg erzwingen, wenn n bei Division durch 3 den Rest 0 oder den Rest 2 lässt.

Vorbemerkungen:

(1) Eine Zweierpotenz ist nie durch 3 teilbar, sondern lässt immer den Rest 1 oder 2.
Begründung: Aufgrund der Eindeutigkeit der Primzahlzerlegung einer Zahl ist 2 die einzige Primzahl, durch die eine Zweierpotenz teilbar sein kann.

(2) Eine natürliche Zahl x lässt bei Division durch 3 genau dann den Rest r (r = 0,1 oder 2), wenn x die Form $x = 3k + r$ für eine natürliche Zahl k hat.

(3) Wird von einer Zahl x, die bei Division durch 3 den Rest 1 lässt, eine Zweierpotenz z subtrahiert, dann lässt das Ergebnis $x - z$ bei Division durch 3 entweder den Rest 0 oder den Rest 2.
Begründung: Andernfalls würde $x - z$ bei Division durch 3 den Rest 1 lassen, denn mehr Möglichkeiten gibt es nicht.
Somit gilt nach (2): $x = 3k + 1$ und $x - z = 3m + 1$ für natürliche Zahlen k und m.
Nun $x - (x - z) = (3k + 1) - (3m + 1) = 3(k - m)$. Da andererseits $x - (x - z) = z$, wäre die Zweierpotenz z durch 3 teilbar – das ist nach (1) unmöglich.

(4) Von einer Zahl x > 0, die bei Division durch 3 den Rest 0 lässt, kommt man durch Subtraktion der Zweierpotenz $2^1 = 2$ zu einer Zahl, die bei Division durch 3 den Rest 1 lässt.
Begründung: Aus $x = 3m$ folgt $x - 2 = 3(m - 1) + 1$. Die Behauptung folgt nun aus (2).

(5) Von einer Zahl x, die bei Division durch 3 den Rest 2 lässt, kommt man durch Subtraktion der Zweierpotenz $2^0 = 1$ zu einer Zahl, die bei Division durch 3 den Rest 1 lässt.
Begründung: Aus $x = 3m + 2$ folgt $x - 1 = 3m + 1$. Die Behauptung folgt nun aus (2).

Beweis der Behauptung:

a) Die Anzahl n der Streichhölzer zu Beginn lasse bei Division durch 3 den Rest 1.
Unabhängig davon welche Zweierpotenz z an Streichhölzern durch Anna weggenommen wird, bleibt nach Vorbemerkung (3) immer eine Anzahl $n - z$ an Streichhölzern übrig, so dass $n - z$ bei Division durch 3 den Rest 0 oder 2 lässt.
In beiden Fällen kann Bernd nach den Vorbemerkungen (4) und (5) so viele Streichhölzer ziehen, dass die Restzahl der Streichhölzer bei Division durch 3 wieder den Rest 1 lässt.
Dies wiederholt sich bei jedem Zug: Bernd kann nach seinem Zug immer eine Anzahl

an Streichhölzern hinterlassen, die bei Division durch 3 den Rest 1 lässt. Während Anna nach ihrem Zug nie nur ein Streichholz übrig lassen kann (1 lässt bei Division durch 3 nicht den Rest 0 oder 2), kann Bernd irgendwann nur noch ein Streichholz übrig lassen. Anna muss dieses nehmen und verliert somit.

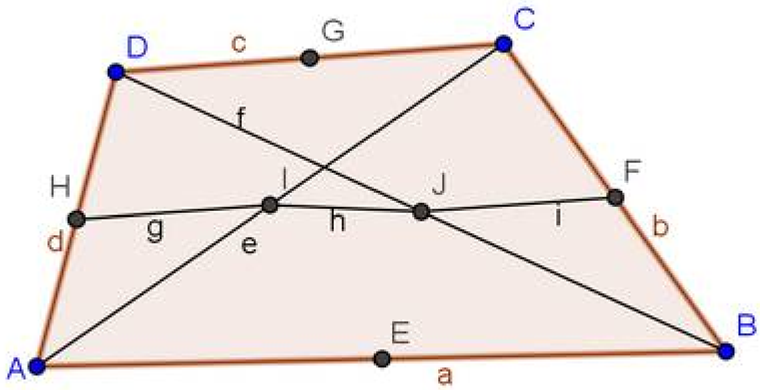
b) Die Anzahl n der Streichhölzer zu Spielbeginn lasse bei Division durch 3 den Rest 0 oder 2.
Nun kann Anna nach Vorbemerkung (4) und (5) so viele Streichhölzer ziehen, dass die Restzahl der Streichhölzer bei Division durch 3 den Rest 1 lässt. Wie beim Beweis von a) kann sie das in jedem Zug tun, so dass schließlich für Bernd nur ein Streichholz bleibt, das er nehmen muss. Somit verliert Bernd.
Die Behauptung ist also bewiesen.

Da 1000 bei Division durch 3 den Rest 1 lässt, kann nach Behauptung a) Bernd den Sieg erzwingen.

Aufgabe 4

Beweise: Ein konvexes Viereck ist genau dann ein Trapez, wenn die Entfernung der beiden Diagonalenmittelpunkte so groß ist wie die halbe Differenz der Längen zweier gegenüberliegender Seiten.

1. Beweismöglichkeit:



1. Beweisrichtung („Wenn Trapez, dann Längeneigenschaft"):

In dem gegebenen Trapez ABCD seien a und c parallele gegenüberliegenden Seiten, wobei $c \le a$. Die Bezeichnungen der Punkte und Strecken sei wie in der obigen Abbildung.
In dem Trapez müssen die Mittelpunkte H, I, J, F der Seiten bzw. Diagonalen d, e, f, b auf einer Geraden liegen, nämlich der Mittelparallelen HF des Trapezes.

Die Strecke $\overline{HF}$ besitzt dabei die Länge $\frac{a+c}{2}$.

Die Strecken $g = \overline{HI}$ bzw. $i = \overline{JF}$ liegen auf den Mittelparallelen der Dreiecke ACD bzw. BCD, daher haben sie beide die Länge $\frac{\overline{CD}}{2} = \frac{c}{2}$.

Somit gilt $\overline{IJ} = \overline{HF} - \overline{HI} - \overline{JF} = \frac{a+c}{2} - \frac{c}{2} - \frac{c}{2} = \frac{a-c}{2}$.

Dies ist die halbe Differenz der Längen zweier gegenüberliegender Seiten. Auch der Sonderfall a = c ist hierbei enthalten.

2. Beweisrichtung („Wenn Längeneigenschaft, dann Trapez“)

Sei umgekehrt ein Viereck ABCD mit $c \le a$ gegeben und seien wie in der obigen Zeichnung die Mittelpunkte der Seiten bzw. Diagonalen d, e, f, b mit H, I, J, F bezeichnet. Nun sei angenommen, dass $\overline{IJ} = \frac{a-c}{2}$ gilt.

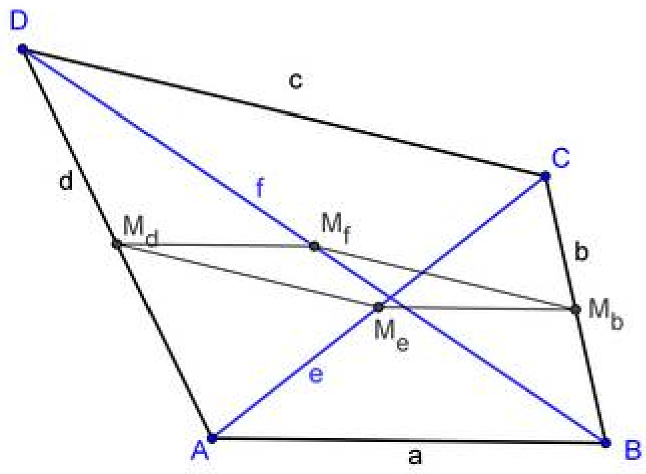
Es ist zu zeigen, dass ABCD ein Trapez ist.

Aus der Lage der Punkte im Viereck ergibt sich:

- $\overline{IF} = \frac{a}{2}$, denn die Strecke $\overline{IF}$ liegt auf der Mittelparallelen im Dreieck ABC.
- $\overline{JF} = \frac{c}{2}$, denn die Strecke $\overline{JF}$ liegt auf der Mittelparallelen im Dreieck BCD.

Also gilt $\overline{IJ} + \overline{JF} = \frac{a-c}{2} + \frac{c}{2} = \frac{a}{2} = \overline{IF}$. Daraus folgt, dass die drei Punkte I, J und F auf einer Geraden liegen. Falls I, J und F nämlich ein Dreieck bilden würden, so müsste nach der Dreiecksungleichung $\overline{IF} < \overline{IJ} + \overline{JF}$ gelten.
Die Gerade IJ ist parallel zu DC, denn JF ist parallel zu DC (JF ist Mittelparallele im Dreieck BCD).
Ebenso ist IJ parallel zu AB, denn IF ist parallel zu AB (IF ist die Mittelparallele im Dreieck ABC)
Da IJ parallel zu AB und DC ist, sind AB und DC ebenfalls parallel.
Somit ist ABCD ein Trapez.

2. Beweismöglichkeit:



Nach dem Satz über die Mittelparallele ist die Verbindungsstrecke der Mittelpunkte von zwei Dreiecksseiten in einem Dreieck parallel zur zugehörigen Dreiecksseite und halb so lang wie diese.

Somit folgt $M_dM_f \parallel AB \parallel M_eM_b$, $\overline{M_dM_f} = \frac{1}{2}a = \overline{M_eM_b}$, $M_dM_e \parallel CD \parallel M_bM_f$ und

$\overline{M_dM_e} = \frac{1}{2}c = \overline{M_bM_f}$.

Das Viereck $M_fM_dM_eM_b$ bildet also ein Parallelogramm.

Genau dann, wenn AB und CD parallel sind, ist es ein entartetes Parallelogramm, denn die vier Punkte M_f, M_d, M_e, M_b liegen dann auf eine Geraden.

Aus der Dreiecksungleichung, angewandt auf das Teildreieck $M_fM_dM_e$, folgt

einerseits $\frac{a}{2} + \overline{M_fM_e} = \overline{M_dM_f} + \overline{M_fM_e} \geq \overline{M_dM_e} = \frac{c}{2}$, also $\overline{M_fM_e} \geq \frac{c-a}{2}$, wobei Gleichheit genau dann eintritt, wenn M_f, M_d, M_e auf einer Geraden liegen. Andererseits ergibt die Dreiecksungleichung im gleichen Dreieck $M_fM_dM_e$ auch

$\frac{c}{2} + \overline{M_fM_e} = \overline{M_dM_e} + \overline{M_fM_e} \geq \overline{M_dM_f} = \frac{a}{2}$, also $\overline{M_fM_e} \geq \frac{a-c}{2}$.

Somit ist insgesamt $\overline{M_fM_e} \geq \frac{|a-c|}{2}$. Da das Viereck $M_fM_dM_eM_b$ ein Parallelogramm ist, tritt in dieser Ungleichung genau dann Gleichheit ein, wenn M_f, M_d, M_e, M_b auf einer Geraden liegen.

Analog lässt sich auch für das Viereck $M_fM_aM_eM_c$ beweisen:

- $M_fM_aM_eM_c$ ist ein Parallelogramm und genau dann wenn BD und DA parallel sind, liegen M_f, M_a, M_e, M_c auf einer Geraden.
- $\overline{M_fM_e} \geq \frac{|b-d|}{2}$, wobei Gleichheit genau dann eintritt, wenn M_f, M_a, M_e, M_c auf einer Geraden liegen.

Daraus ergeben sich folgende Äquivalenzen:

Das Viereck $ABCD$ ist ein Trapez

$\Leftrightarrow$ $AB \,||\, CD$ oder $BD \,||\, DA$

$\Leftrightarrow$ M_f, M_d, M_e, M_b liegen auf einer Geraden oder M_f, M_a, M_e, M_c liegen auf einer Geraden

$\Leftrightarrow$ $\overline{M_eM_f} = \frac{|a-c|}{2}$ oder $\overline{M_eM_f} = \frac{|b-d|}{2}$

Das war zu zeigen.