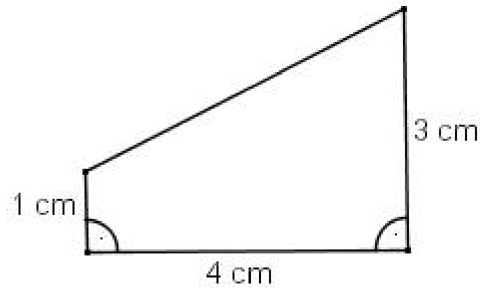
Landeswettbewerb Mathematik
Baden-Württemberg
Musterlösungen 1. Runde 2008/2009

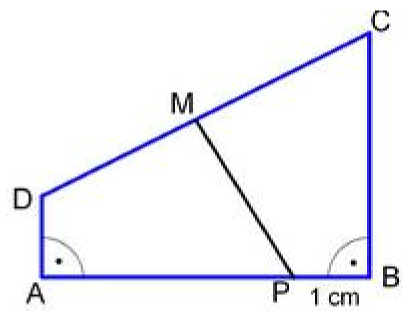
Aufgabe 1

Das abgebildete Viereck soll durch einen einzigen geraden Schnitt so zerlegt werden, dass zwei Teile gleicher Form und Größe entstehen.
Begründe, dass dies möglich ist.



Lösung:

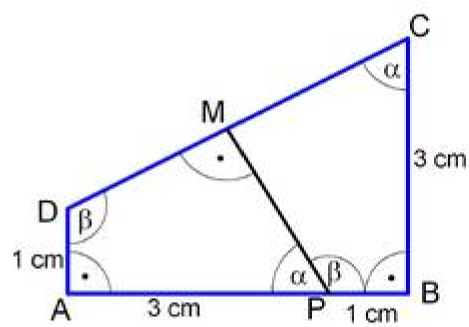
Die Eckpunkte des gegebenen Vierecks werden entsprechend nebenstehender Skizze mit A, B, C und D bezeichnet.



Der Mittelpunkt M der Strecke $\overline{CD}$ wird mit einem Punkt P auf der Seite $\overline{AB}$ verbunden, der von B 1 cm entfernt ist. Durch einen Schnitt entlang dieser Verbindung wird das Viereck in zwei Teile gleicher Form und Größe zerlegt.
Alternativen zur Beschreibung:

- Es wird eine Orthogonale von P auf $\overline{CD}$ gefällt.
- Es wird die Mittelsenkrechte zu $\overline{CD}$ gezeichnet.

1. Beweisvorschlag (Orthogonale von P auf $\overline{CD}$):



Der Punkt P liege auf der Seite $\overline{AB}$ im Abstand 1 cm von B (s. Zeichnung). Der gesuchte Schnitt ist eine Orthogonale durch P zur Seite $\overline{CD}$. Sei M der Schnittpunkt dieser Orthogonalen mit der Seite $\overline{CD}$.
Sei $\alpha = \measuredangle MPA$ und $\beta = \measuredangle BPM$. Dann ist $\beta = 180° - \alpha$.
Da die Winkelsumme im Viereck APMD 360° ergibt und die Innenwinkel bei A und M jeweils 90° betragen, sind ergeben $\measuredangle ADM$ und α zusammen 180°. Somit $\measuredangle ADM = 180° - \alpha = \beta$.
Analog argumentiert man im Viereck PBCM und erhält $\measuredangle MCB = 180° - \beta = \alpha$.
In den Vierecken APMD und BCMP sind also jeweils zwei benachbarte Seiten gleich lang: $\overline{AP} = \overline{BC} = 3\,\text{cm}$, $\overline{AD} = \overline{BP} = 1\text{cm}$. Außerdem ist der zwischen den benachbarten Seiten eingeschlossene Winkel in beiden Vierecken ein rechter Winkel. Die an die Seiten anschließenden Winkel (α bzw. β) sind auch in beiden Vierecken gleich.
Daraus folgt nun, dass die beiden Teilvierecke APMD und BCMP deckungsgleich, also von gleicher Form und Größe sind. Legt man nämlich das Viereck APMD so auf das Viereck BCMP,

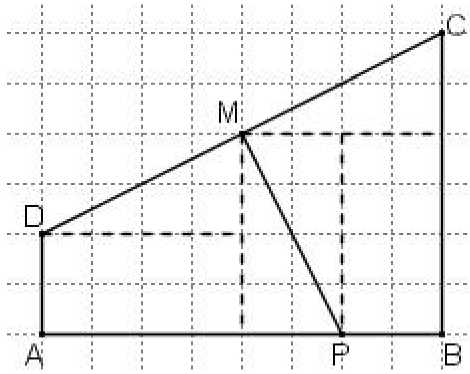
dass $\overline{AP}$ auf $\overline{BC}$ zu liegen kommt, so liegt $\overline{AD}$ auf $\overline{BP}$. Da $\sphericalangle ADM = \beta = \sphericalangle BPM$ liegt dann die Seite $\overline{DM}$ von APMD auf der Seite $\overline{PM}$ von BCMP. Analog folgt aus $\sphericalangle MCB = \alpha = \sphericalangle MPA$, dass die Seite $\overline{PM}$ von APMD auf der Seite $\overline{CM}$ von BCMP liegt. Somit sind die beiden Vierecke deckungsgleich.

2. Beweisvorschlag (Zerlegung auf kariertem Papier):

Man zeichnet das gegebene Viereck wie in der Abbildung auf kariertes Papier. Die Eckpunkte A, B, C, D des Vierecks sind Karoeckpunkte.

M sei der Mittelpunkt der Strecke $\overline{CD}$. P liege auf $\overline{AB}$, 1 cm von B entfernt. Dann sind auch M und P Karoeckpunkte.

Nun kann man die Vierecke APMD und BCMP wie in der Abbildung in Rechtecke mit Länge 2 cm und Breite 1 cm und in rechtwinklige Dreiecke zerlegen. Die rechtwinkligen Dreiecke sind halbe Rechtecke, sie haben alle die gleiche Form und Größe.



Aus dieser Zerlegung ergibt sich, dass die Vierecke APMD und BCMP ebenfalls gleiche Form und Größe haben.

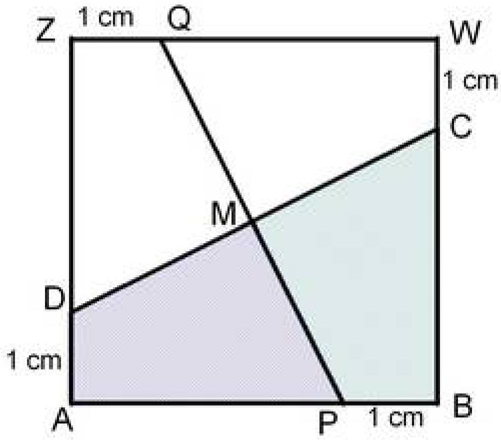
3. Beweisvorschlag (Drehsymmetrie eines Quadrats):

In einem Quadrat ABWZ mit der Seitenlänge 4 cm seien die Punkte P, C, Q und D wie in der Abbildung so auf den Quadratseiten gewählt, dass

$\overline{PB} = \overline{CW} = \overline{QZ} = \overline{DA} = 1$ cm.

Sei M der Mittelpunkt dieses Quadrats.

Das Viereck ABCD entspricht dann offensichtlich dem in der Aufgabe vorgegebenen Viereck. Durch eine Punktspiegelung am Mittelpunkt M des Quadrats wird D auf C abgebildet. Somit ist M auch der Mittelpunkt von $\overline{CD}$. Entlang der Strecke $\overline{MP}$ wird dieses Viereck zerschnitten.



Es ist zu zeigen, dass die markierten Vierecke APMD und BCMP die gleiche Form und Größe haben.

Bei einer Drehung um M mit Drehwinkel 90° wird das Quadrat auf sich abgebildet, und zwar A auf B, B auf W, W auf Z und Z auf A, sowie P auf C, C auf Q, Q auf D und D auf P.

Deshalb wird das Viereck APMD bei dieser Drehung auf das Viereck BCMP abgebildet. Diese beiden Vierecke haben also gleiche Form und Größe, was zu zeigen war.

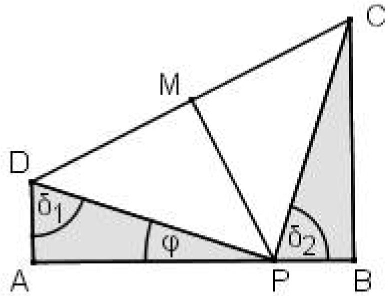
4. Beweisvorschlag (Kongruenz von Dreiecken):

M sei der Mittelpunkt der Strecke $\overline{CD}$, P liege auf $\overline{AB}$, 1 cm von B entfernt.
Zeichnet man in dem vorgegebenen Viereck ABCD die Strecken $\overline{PD}$ und $\overline{PC}$ ein, so gilt:

(1) Die Dreiecke APD und BCP sind nach dem Kongruenzsatz SWS kongruent, denn nach Aufgabenstellung
- $\overline{AP} = \overline{BC} = 3$ cm;
- $\overline{DA} = \overline{PB} = 1$ cm;
- $\sphericalangle PAD = \sphericalangle CBP = 90^0$.

Daraus folgt insbesondere $\sphericalangle ADP = \delta_1 = \delta_2 = \sphericalangle BPC$.
Demnach gilt: $\sphericalangle CPD = 180^o - (\delta_2 + \varphi) = 180^o - (\delta_1 + \varphi) = 90^o$. (*)

(2) Die Dreiecke DPM und PCM sind nach dem Kongruenzsatz SSS kongruent, denn
- $\overline{MD} = \overline{MC}$, da M der Mittelpunkt von $\overline{CD}$ ist;
- $\overline{PD} = \overline{PC}$ nach (1);
- $\overline{PM} = \overline{PM}$.

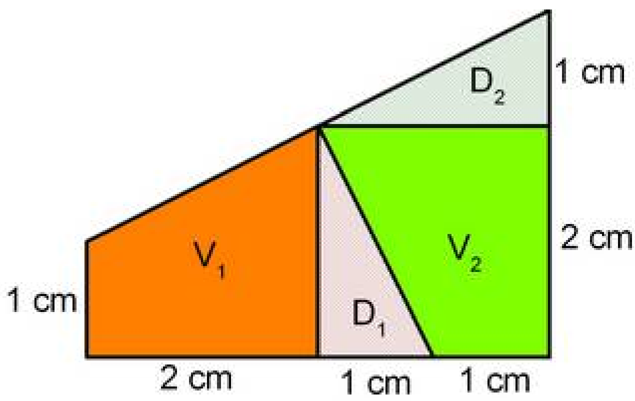


Demnach folgt:
- $\sphericalangle DMP = \sphericalangle PMC = 90^o$ (denn $\sphericalangle DMP = \sphericalangle PMC$ und $\sphericalangle DMC = 180^o$);
- $\sphericalangle MPD = \sphericalangle CPM = 45^o$ (denn wegen (2) ist $\sphericalangle MPD = \sphericalangle CPM$ und wegen (*)),
- $\sphericalangle PDM = \sphericalangle MCP = 45^o$ (Winkelsumme im Dreieck).

Die Dreiecke DPM und PCM sind demnach rechtwinklig und gleichschenklig.
Daraus und aus (1) folgt nun, dass die beiden Vierecke APMD und BCMP kongruent sind, somit gleiche Form und Größe haben.

5. Beweisvorschlag::

In der nebenstehenden Figur sind die Vierecke V_1 und V_2 kongruent, denn sie entstehen beide aus einem Quadrat mit Seitenlänge 2 cm, bei dem ein Dreieck (kongruent zu D_1 bzw. D_2) abgetrennt wird. Das Dreieck D_2 wird an V_2 in analoger Weise angesetzt, wie D_1 an V_1. Daher ist das aus V_1 und D_1 zusammengesetzte Viereck kongruent zum Viereck das aus V_2 und D_2 zusammengesetzt ist.



Somit legt eine Aufteilung des Gesamtvierecks in kongruente Teilvierecke vor.

Aufgabe 2

Gegeben sind sechs verschiedene Zahlen. Theo berechnet alle möglichen Differenzen von je zwei dieser sechs Zahlen. Anschließend multipliziert er die Ergebnisse miteinander.
Warum ist dieses Produkt immer negativ?

Vorbemerkung:

Ein Produkt von einer ungeraden Anzahl von negativen Zahlen ist immer negativ.
Ein Produkt von einer geraden Anzahl von negativen Zahlen ist immer positiv.

Begründung der Vorbemerkung:

Für das Vorzeichen bei einem Produkt von zwei ganzen Zahlen gilt bekanntlich folgende Tabelle:

•	+	−
+	+	−
−	−	+

Das Produkt von zwei negativen Zahlen ist also positiv, kurz: $- \bullet - = +$.

Somit gilt für ein Produkt von drei negativen Zahlen: $- \bullet - \bullet - = (- \bullet -) \bullet - = + \bullet - = -$, es ist also immer negativ.
Ein Produkt von vier negativen Zahlen ist wieder positiv: $- \bullet - \bullet - \bullet - = (- \bullet - \bullet -) \bullet - = - \bullet - = +$.

Bei fünf negativen Zahlen ist das Ergebnis wieder negativ:
$- \bullet - \bullet - \bullet - \bullet - = (- \bullet - \bullet - \bullet -) \bullet - = + \bullet - = -$.

Dies setzt sich so fort: Das Vorzeichen dreht sich stets um, wenn man einen weiteren negativen Faktor hinzunimmt.

Somit ist das Ergebnis bei einer geraden Anzahl von Faktoren immer positiv, bei einer ungeraden Anzahl ist es negativ.

1. Beweisvorschlag zur Aufgabe:

Die sechs Zahlen seien a_1, a_2, a_3, a_4, a_5 und a_6.

Dabei sei $a_1 < a_2 < a_3 < a_4 < a_5 < a_6$, d.h. a_1 bezeichne die kleinste der sechs Zahlen, a_2 die zweitkleinste usw.

Eine Differenz von zwei der sechs Zahlen ist positiv, wenn von einer größeren Zahl eine kleinere Zahl abgezogen wird. So ist z.B. $a_5 - a_2$ positiv. Umgekehrt ist $a_2 - a_5$ negativ.

Theo kann nun 15 positive Differenzen aus je zwei dieser sechs Zahlen bilden:
$a_6 - a_1$, $a_6 - a_2$, $a_6 - a_3$, $a_6 - a_4$, $a_6 - a_5$,
$a_5 - a_1$, $a_5 - a_2$, $a_5 - a_3$, $a_5 - a_4$,
$a_4 - a_1$, $a_4 - a_2$, $a_4 - a_3$,
$a_3 - a_1$, $a_3 - a_2$,
$a_2 - a_1$.

Außerdem kann Theo 15 negative Differenzen bilden:
$a_1 - a_2$, $a_1 - a_3$, $a_1 - a_4$, $a_1 - a_5$, $a_1 - a_6$,
$a_2 - a_3$, $a_2 - a_4$, $a_2 - a_5$, $a_2 - a_6$,
$a_3 - a_4$, $a_3 - a_5$, $a_3 - a_6$,
$a_4 - a_5$, $a_4 - a_6$,
$a_5 - a_6$.

Insgesamt kann Theo also 30 Differenzen bilden. Das Produkt aller 30 Differenzen ist das Produkt der 15 positiven und der 15 negativen Differenzen.

Das Produkt der 15 positiven Differenzen ist wieder positiv.
Das Produkt der 15 negativen Differenzen ist negativ (s. Vorbemerkung), da 15 ungerade ist.
Somit ist das Gesamtprodukt der 30 Differenzen also das Produkt einer positiven Zahl (dem Produkt der 15 positiven Zahlen) und einer negativen Zahl (dem Produkt der 15 negativen Differenzen). Das Ergebnis ist immer negativ, da das Produkt einer positiven und einer negativen Zahl negativ ist.

2. Beweisvorschlag zur Aufgabe:

Die sechs verschiedenen gegebenen Zahlen seien a, b, c, d, e und f.
Dann kann Theo 30 verschiedene Differenzen bilden:

$a - b,\ a - c,\ a - d,\ a - e,\ a - f;$
$b - a,\ b - c,\ b - d,\ b - e,\ b - f;$
$c - a,\ c - b,\ c - d,\ c - e,\ c - f;$
$d - a,\ d - b,\ d - c,\ d - e,\ d - f;$
$e - a,\ e - b,\ e - c,\ e - d,\ e - f;$
$f - a,\ f - b,\ f - c,\ f - d,\ f - e.$

Die 30 Differenzen lassen sich zu 15 Paaren aus je zwei Differenzen zusammenstellen, in denen nur die Reihenfolge der beiden Zahlen, aus denen die Differenz gebildet wird, vertauscht ist: Z.B. bilden $a–b$ und $b–a$ so ein Paar, oder $a–c$ und $c–a$ usw.

Die eine Differenz in so einem Paar ist die Gegenzahl der anderen Differenz.
Wenn z.B. $a–b = –7$, so ist $b–a = +7$. Allgemein gilt $b–a = –(a–b)$.
In jedem der 15 Paare ist also eine Differenz negativ, die andere positiv. Das Produkt der beiden Differenzen, die zu einem Paar gehören, ist also immer negativ, da $+ \bullet - = -$.
Im gerade genannten Beispiel wäre $(a–b)\cdot(b–a) = (–7)\cdot(+7) = –49$.

Das Produkt aller 30 Differenzen, das Theo bildet, ist also das Produkt der 15 Produkte der Paare, also das Produkt von 15 negativen Zahlen.
Nach der Vorbemerkung ist das Produkt von 15 negativen Zahlen immer negativ, da 15 ungerade ist. Somit ist Theos Ergebnis immer negativ.

3. Beweisvorschlag zur Aufgabe:

Die sechs verschiedenen gegebenen Zahlen seien a, b, c, d, e und f. Dann kann Theo wie im 2. Beweisvorschlag 30 verschiedene Differenzen bilden.

Da $b–a = –(a–b)$, ist $(a–b)\cdot(b–a) = –(a-b)^2$.

Für das Produkt der 30 Differenzen ergibt sich also durch Umstellen:

$$
\begin{aligned}
& (a–b)(a–c)(a–d)(a–e)(a–f)(b–a)(b–c)(b–d)(b–e)(b–f)(c–a)(c–b)(c–d)(c–e)(c–f) \\
& \cdot(d–a)(d–b)(d–c)(d–e)(d–f)(e–a)(e–b)(e–c)(e–d)(e–f)(f–a)(f–b)(f–c)(f–d)(f–e) \\
= \ & [(a–b)(b–a)]\cdot[(a–c)(c–a)]\cdot[(a–d)(d–a)]\cdot[(a–e)(e–a)]\cdot[(a–f)(f–a)]\cdot[(b–c)(c–b)]\cdot[(b–d)(d–b)] \\
& \cdot[(b–e)(e–b)]\cdot[(b–f)(f–b)]\cdot[(c–d)(d–c)]\cdot[(c–e)(e–c)]\cdot[(c–f)(f–c)]\cdot[(d–e)(e–d)]\cdot[(d–f)(f–d)] \\
& \cdot[(e–f)(f–e)] \\
= \ & [–(a–b)^2]\cdot[–(a–c)^2]\cdot[–(a–d)^2]\cdot[–(a–e)^2]\cdot[–(a–f)^2]\cdot[–(b–c)^2]\cdot[–(b–d)^2]\cdot[–(b–e)^2]\cdot[–(b–f)^2] \\
& \cdot[–(c–d)^2]\cdot[–(c–e)^2]\cdot[–(c–f)^2]\cdot[–(d–e)^2]\cdot[–(d–f)^2]\cdot[–(e–f)^2] \\
= \ & –(a–b)^2(a–c)^2(a–d)^2(a–e)^2(a–f)^2(b–c)^2(b–d)^2(b–e)^2(b–f)^2(c–d)^2(c–e)^2(c–f)^2(d–e)^2(d–f)^2(e–f)^2
\end{aligned}
$$

Da Quadratzahlen immer positiv sind, ist das Produkt von Quadratzahlen sicher positiv. Somit ist

$–(a–b)^2(a–c)^2(a–d)^2(a–e)^2(a–f)^2(b–c)^2(b–d)^2(b–e)^2(b–f)^2(c–d)^2(c–e)^2(c–f)^2(d–e)^2(d–f)^2(e–f)^2$

negativ und damit ist das Produkt der 30 Differenzen negativ.

Aufgabe 3

An der Tafel stehen die natürlichen Zahlen von 1 bis n. Du darfst immer dann drei Zahlen wegwischen, wenn eine dieser Zahlen die Summe der beiden anderen ist.
Für welche $n \leq 20$ kannst du alle Zahlen wegwischen?

Lösung:

Dies ist nur möglich, wenn n = 3 oder n = 12 oder n = 15 ist.

1. Beweisvorschlag:

Eine notwendige Bedingung für n ist, dass n durch 3 teilbar ist, denn es werden pro Zug genau 3 Zahlen entfernt. Es kommen also für n nur 3, 6, 9, 12, 15 und 18 in Frage.

Bei einem „Wisch“ werden drei Zahlen weggewischt, wir bezeichnen sie mit a, b und c.
Hierbei sei c die größte der drei Zahlen, also $a + b = c$.

Je nachdem ob a und b gerade (g) oder ungerade (u) sind, gibt es vier Fälle, die in der Tabelle dargestellt sind:

Fall	**a**	**b**	**c = a + b**
1	g	g	g
2	g	u	u
3	u	g	u
4	u	u	g

Man erkennt: In jedem der vier Fälle ist entweder keine der drei Zahlen ungerade (Fall1) oder es sind genau zwei der drei Zahlen ungerade (Fall 2 bis Fall 4).
In jedem Fall wird also bei einem „Wisch“ eine gerade Zahl (0 oder 2) von ungeraden Zahlen weggewischt. Insgesamt wird also eine gerade Zahl von ungeraden Zahlen weggewischt.
Wir müssen also prüfen, für welches n mit n = 3, 6, 9, 12, 15, 18 es eine gerade Zahl von ungeraden Zahlen $\leq n$ gibt:

n	**3**	**6**	**9**	**12**	**15**	**18**
Anzahl v. ungeraden Zahlen $\leq n$	2	3	5	6	8	9

Man erkennt, dass es nur für n = 3, 12 und 15 eine gerade Zahl von ungeraden Zahlen bis n gibt.
Nur diese drei Zahlen kommen also in Frage.

Tatsächlich kann man zeigen, dass 3, 12, 15 Lösungen der Aufgabe sind:

n = 3 Wegen 1 + 2 = 3 können alle Zahlen in einem Zug weggewischt werden.
n = 12 Hier können die Zahlen in vier Dreiergruppen wie folgt gewischt werden:
1 + 5 = 6; 2 + 9 = 11; 3 + 7 = 10; 4 + 8 = 12.
n = 15 Hier können die Zahlen in fünf Dreiergruppen wie folgt gewischt werden:
1 + 14 = 15; 2 + 10 = 12; 3 + 8 = 11; 4 + 5 = 9; 6 + 7 = 13.

2. Beweisvorschlag:

Wie im ersten Beweisvorschlag wird gezeigt, dass n durch 3 teilbar sein muss, da jeweils 3 Zahlen weggewischt werden. Es kommt also nur n = 3, 6, 9, 12, 15, 18 in Frage.
Bezeichnet man die drei bei einem „Wisch“ gestrichenen Zahlen mit a, b und $(a + b)$, so ist die Summe dieser drei weggewischten Zahlen: $a + b + (a + b) = 2 \cdot (a + b)$.
Die Zahl $2 \cdot (a + b)$ ist aber eine gerade Zahl. Bei jedem „Wisch“ werden also drei Zahlen weggewischt, deren Summe gerade ist. Wenn man also alle Zahlen wegwischen kann, so muss auch die Gesamtsumme $1 + 2 + 3 + ... + n$ gerade sein.

1. Möglichkeit:

Man berechnet $1+2+3+....+n$ für n = 3, 6, 9, 12, 15, 18:

n	**3**	**6**	**9**	**12**	**15**	**18**
$1+2+3+....+n$	6	21	45	78	120	171

Man erkennt, dass nur für n = 3, 12 und 15 die Summe $1+2+3+....+n$ gerade ist.
Nur diese drei Zahlen kommen also in Frage.
Wie im 1. Beweisvorschlag erkennt man, dass diese drei Zahlen auch tatsächlich Lösungen der Aufgabe sind.

2. Möglichkeit:

Man berechnet $1+2+3+....+n$ mit Hilfe der gaußschen Formel $1+2+3+....+n=\frac{n\cdot(n+1)}{2}$.

Wenn $\frac{n\cdot(n+1)}{2}$ gerade sein soll, so muss das Produkt $n\cdot(n+1)$ durch 4 teilbar sein.
Da die aufeinander folgenden Zahlen n und n + 1 nicht beide zugleich gerade sein können, muss entweder n oder n + 1 durch 4 teilbar sein.

Im ersten Fall ist n durch 4 und zugleich auch durch 3 teilbar. Geht man der Reihe nach alle Zahlen $n\leq 20$ durch, so sieht man, dass nur n = 12 sowohl durch 4 als auch durch 3 teilbar ist..

Im zweiten Fall ist n + 1 durch 4 teilbar und n ist durch 3 teilbar. Nur für n = 3 und n = 15 ist auch n + 1 durch 4 teilbar.

Die beiden Fälle zeigen: Nur n = 3, 12, 15 können Lösung der Aufgabe sein, weitere Lösungen kann es nicht geben.
Wie im 1. Beweisvorschlag erkennt man, dass diese drei Zahlen auch tatsächlich Lösungen der Aufgabe sind.

Aufgabe 4

Aus mehreren gleichartigen Spielwürfeln soll ein massiver Würfel gebaut werden. Dabei muss die Summe der Augenzahlen auf seiner Oberfläche kleiner sein als die Anzahl der verwendeten Spielwürfel.
Für welche Anzahlen von Spielwürfeln ist dies möglich?

Lösung:

Wenn für den massiven Würfel mindestens $8^3 = 512$ Spielwürfel verwandt wurden, ist es möglich, dass die Summe der Augenzahlen auf seiner Oberfläche kleiner ist, als die Anzahl der verwendeten Spielwürfel.

Beweisvorschlag:

Ist n die Anzahl der Spielwürfel auf einer Kante, so enthält der gebaute Würfel genau n^3 Spielwürfel, da er massiv, d.h. ohne Hohlräume, sein soll. Da mehrere Spielwürfel verwendet werden sollen, kann man annehmen, dass n > 1 ist.

Es gibt drei verschiedene Lagen für die Spielwürfel, die in den großen Würfel eingebaut werden:

(1) Eckwürfel: Bei diesen sind genau drei Seitenflächen sichtbar. Man kann diese Eckwürfel so einbauen, dass die drei sichtbaren Außenflächen gerade die Augenzahlen 1, 2 und 3 tragen. Dann wird die Summe der Augenzahlen auf der Oberfläche minimal.
Es gibt acht Eckwürfel. Da sie jeweils $1+2+3=6$ zur Gesamtsumme beitragen, tragen sie zusammen $8 \cdot 6 = 48$ zur Summe bei.

(2) Kantenwürfeln, die nicht an einer Ecke liegen: Bei diesen sieht man genau zwei Seitenflächen. Für eine kleine Gesamtsumme der Augenzahlen fügt man die Kantenwürfel so ein, dass die beiden sichtbaren Flächen die Augenzahlen 1 und 2 tragen.
Auf jeder Kante liegen $n-2$ Würfel, die keine Eckwürfel sind. Bei 12 Kanten sind dies zusammen $12 \cdot (n-2)$ Würfel. Da sie jeweils $1+2=3$ zur Gesamtsumme beitragen, tragen sie zusammen mit $12 \cdot (n-2) \cdot 3 = 36 \cdot (n-2)$ bei.

(3) Seitenwürfel, die weder Eck- noch Kantenwürfel sind: Bei diesen sieht man genau eine Seitenfläche. Man kann sie so einbauen, dass die außen sichtbare Fläche immer die Augenzahl 1 trägt.
Es gibt auf jeder Seitenfläche des großen Würfels $(n-2)^2$ solche Spielwürfel, insgesamt also $6 \cdot (n-2)^2$ Würfel. Sie tragen zusammen mit $6 \cdot (n-2)^2$ zur Summe der Augenzahlen auf der Oberfläche bei.

Der minimale Wert S für die Gesamtsumme ist demnach

$$S = 48 + 36 \cdot (n-2) + 6 \cdot (n-2)^2 = 6 \cdot (n^2 - 4n + 4 + 6n - 12 + 8) = 6 \cdot n \cdot (n+2).$$

S ist kleiner als die Anzahl der verwendeten Spielwürfel, wenn S kleiner als n^3 ist.
Dies führt auf

$$6 \cdot n \cdot (n+2) < n^3 \text{ oder (wegen } n > 0\text{) } 6n + 12 < n^2$$

Somit muss $n^2 - 6n - 12 > 0$ gelten.

Nun ist $n^2 - 6n - 12 = n^2 - 6n + 9 - 9 - 12 = (n-3)^2 - 21$.

Also ist $n^2 - 6n - 12 > 0$ äquivalent zu $(n-3)^2 - 21 > 0$ bzw. $(n-3)^2 > 21$.

Da n eine natürlich Zahl ist, ist diese Ungleichung genau dann erfüllt, wenn $n - 3 \geq 5$ oder $n \geq 8$ gilt.

Die minimale Gesamtsumme S ist also ab n = 8 kleiner als n^3.

Wenn für den massiven Würfel also mindestens $8^3 = 512$ Spielwürfel verwandt wurden, ist es möglich, dass die Summe der Augenzahlen auf seiner Oberfläche kleiner ist, als die Anzahl der verwendeten Spielwürfel.

Alternative zum Beweis von $n^2 - 6n - 12 > 0$ ***ab n = 8:***

Die quadratische Gleichung $n^2 - 6n - 12 = 0$ hat die Lösungen

$$n_{1/2} = \frac{6 \pm \sqrt{6^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-12)}}{2} = \frac{6 \pm \sqrt{84}}{2} = 3 \pm \sqrt{21}.$$

Die Parabel mit der Gleichung $y = x^2 - 6x - 12 = (x-3)^2 - 21$ hat ihren Scheitel bei x = 3 und ist nach oben geöffnet. Daher nimmt $n^2 - 6n - 12$ für n > 3 mit wachsendem n zu. Somit ist für $n > 3 + \sqrt{21} \approx 7{,}58$ die Ungleichung $n^2 - 6n - 12 > 0$ erfüllt.

Für alle $n \geq 8$ gilt also $n^2 - 6n - 12 > 0$ und somit ist die minimale Gesamtsumme S kleiner als n^3. Für $2 \leq n \leq 7$ ist hingegen $n^2 - 6n - 12 > 0$ nicht erfüllt und somit $S \geq n^3$.

Wenn für den massiven Würfel also mindestens $8^3 = 512$ Spielwürfel verwandt wurden, ist es möglich, dass die Summe der Augenzahlen auf seiner Oberfläche kleiner ist, als die Anzahl der verwendeten Spielwürfel.

Aufgabe 5

Zeige: Unter drei beliebig gewählten ganzen Zahlen gibt es stets zwei, deren Produkt eine Differenz von zwei Quadratzahlen ist.

Beispiel:

Die drei Zahlen seien 2, –3 und 5.
Die Produkte 2·(–3) = –6 und 2·5 = 10 lassen sich nicht als Differenz von Quadratzahlen schreiben.
Das Produkt (–3)·5 = –15 = $1^2 - 4^2$ ist hingegen eine Differenz von Quadratzahlen.

1. Beweisvorschlag:

Behauptung:

a) Eine ungerade ganze Zahl n ist eine Differenz von zwei Quadratzahlen.

b) Eine durch 4 teilbare ganze Zahl n ist eine Differenz von Quadratzahlen.

Beweis der Behauptung:

a) Die Differenz von aufeinanderfolgenden Quadratzahlen ist immer ungerade. Dabei kommen alle ungeraden Zahlen als Differenzen von aufeinanderfolgenden Quadratzahlen vor:

$$1^2 - 0^2 = 1,\ 2^2 - 1^2 = 3,\ 3^2 - 2^2 = 5,\ 4^2 - 3^2 = 7 \text{ usw.}$$

Durch Vertauschen erhält man auch die negativen ungeraden Zahlen.

Diese Behauptung beweist man so:

Gegeben sei eine ungerade Zahl n. Dann ist $n-1$ gerade, also durch 2 teilbar.
Schreibt man k für die Hälfte von $n-1$, so ist $n-1 = 2\cdot k$.
Es gilt also $n = 2\cdot k + 1$.

Dann ist die Differenz der aufeinanderfolgenden Quadratzahlen $(k+1)^2$ und k^2 gleich n.

Es gilt nämlich $(k+1)^2 - k^2 = k^2 + 2k + 1 - k^2 = 2k + 1 = n$.

b) Sei n eine durch 4 teilbare ganze Zahl.

Dann gibt es eine ganze Zahl m mit $n = 4m$.

Dann ist: $(m+1)^2 - (m-1)^2 = m^2 + 2m + 1 - m^2 + 2m - 1 = 4m = n$.

Also ist auch in diesem Fall n eine Differenz von Quadratzahlen und die Behauptung ist bewiesen.

Zurück zur eigentlichen Aufgabe: Es gibt zwei Fälle.

Fall 1: Unter den drei gegeben ganzen Zahlen gibt es mindestens zwei ungerade Zahlen.

In diesem Fall ist das Produkt dieser beiden ungeraden Zahlen ebenfalls ungerade.

Nach Teil a) der Behauptung ist dieses Produkt der beiden ungeraden Zahlen eine Differenz von Quadratzahlen.

Fall 2: Es ist nur höchstens eine ungerade Zahl unter den drei Zahlen.

Dann muss es mindestens zwei gerade Zahlen a und b unter den drei Zahlen geben.
Das Produkt von zwei geraden Zahlen ist aber durch 4 teilbar: Da a und b gerade sind, gibt es ganze Zahlen k und m, so dass $a = 2k$ und $b = 2m$. Folglich ist das Produkt $a\cdot b = 2k\cdot 2m = 4km$ durch 4 teilbar.

Nach Teil b) der Behauptung ist dieses Produkt der beiden geraden Zahlen auch eine Differenz von Quadratzahlen.

2. Beweisvorschlag:

Unter den drei Zahlen gibt es zwei Zahlen a und b, die entweder beide gerade oder beide ungerade sind, die also dieselbe Parität haben.
Die Summe und die Differenz dieser beiden Zahlen ist auf jeden Fall gerade.

Somit sind sowohl $\frac{a+b}{2}$ als auch $\frac{a-b}{2}$ ganze Zahlen.

Dann ergibt sich:

$$\left(\frac{a+b}{2}\right)^2-\left(\frac{a-b}{2}\right)^2=\frac{a^2+2ab+b^2}{4}-\frac{a^2-2ab+b^2}{4}=\frac{4ab}{4}=a\cdot b$$

Somit ist das Produkt $a\cdot b$ eine Differenz von zwei Quadratzahlen.

3. Beweisvorschlag:

Unter den drei Zahlen gibt es zwei, die entweder beide gerade oder beide ungerade sind.
Die Differenz dieser beiden Zahlen ist auf jeden Fall gerade. Die kleinere der beiden Zahlen wird mit k bezeichnet, die größere mit $k+2n$, wobei n eine natürliche Zahl ist.

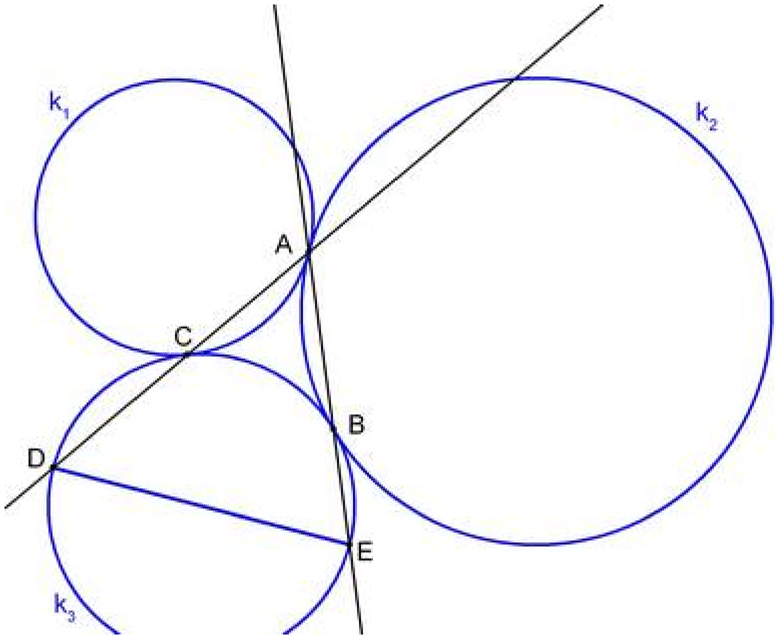
Wir suchen nun ganze Zahlen x und y, so dass das Produkt von k und $k+2n$ eine Differenz von Quadratzahlen ist, also $k\cdot(k+2n)=x^2-y^2$. Nach der 3. Binomischen Formel gilt dann
$k\cdot(k+2n)=(x-y)\cdot(x+y)$.
Dies Gleichung ist erfüllt, wenn $k=x-y$ (I) und $k+2n=x+y$ (II).

Durch Addition dieser beiden Gleichungen erhält man $k+(k+2n)=(x-y)+(x+y)=2x$, also $k+n=x$.
Durch Subtraktion der beiden Gleichungen (I) und (II) erhält man
$(k+2n)-k=(x+y)-(x-y)=2y$, also $n=y$.

Nun ist $x^2-y^2=(k+n)^2-n^2=k^2+2kn=k\cdot(k+2n)$, also ist das Produkt $k\cdot(k+2n)$ eine Differenz von Quadratzahlen.

Aufgabe 6

Drei Kreise k_1, k_2 und k_3 berühren sich von außen paarweise in den Punkten A, B und C (siehe Abb. rechts).
Die Geraden AB und AC schneiden den Kreis k_3 zusätzlich in den Punkten D und E.
Zeige, dass die Strecke $\overline{DE}$ ein Durchmesser von k_3 ist.



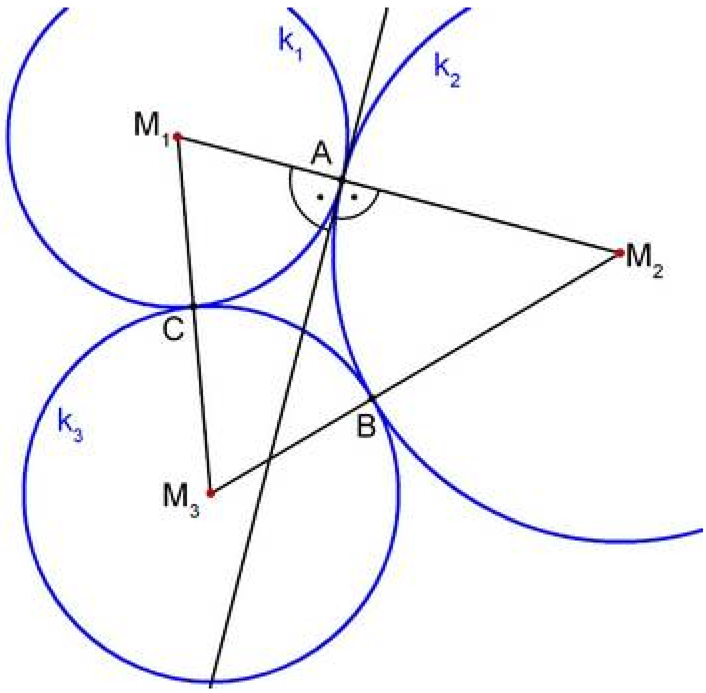
1. Beweisvorschlag:

Behauptung 1:

Seien M_1, M_2, M_3 jeweils die Mittelpunkte der Kreise k_1, k_2 und k_3. Dann liegen die Berührpunkte A, B, C der Kreise auf den Seiten des Dreiecks $M_1M_2M_3$.

Beweis der Behauptung 1:

Die Kreise k_1 mit Mittelpunkt M_1 und k_2 mit Mittelpunkt M_2 berühren sich im Punkt A.
Berühren heißt: Es gibt im Punkt A eine gemeinsame Tangente an beide Kreise.
Die Kreisradien $\overline{M_1A}$ und $\overline{M_2A}$ sind beide orthogonal zu dieser gemeinsamen Tangenten.
Daher ist der Winkel $\sphericalangle M_1AM_2$ ein gestreckter Winkel, d.h. der Punkt A liegt auf der Strecke $\overline{M_1M_2}$.
Analog zeigt man, dass B auf $\overline{M_2M_3}$ und C auf $\overline{M_1M_3}$ liegt.



Behauptung 2:

Die Strecken $\overline{AM_1}$ und $\overline{EM_3}$ sind parallel.

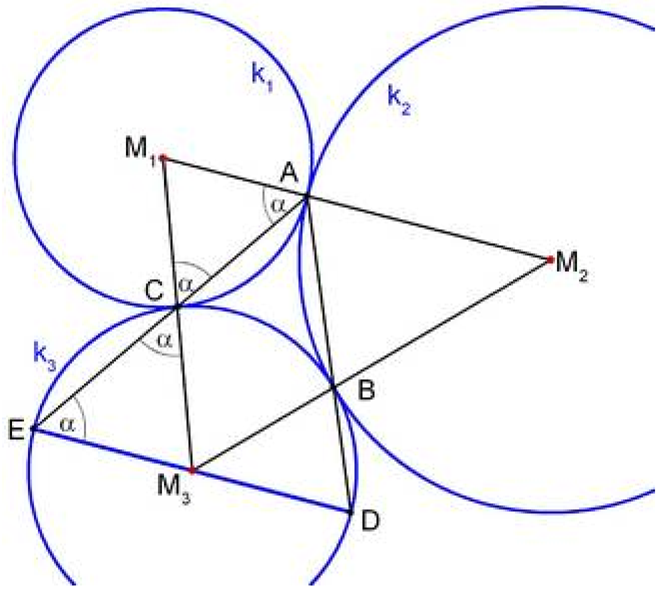
Beweis der Behauptung 2:

In der nebenstehenden Figur gelten folgende Winkelbeziehungen:

a) $\sphericalangle ACM_1 = \sphericalangle ECM_3 = \alpha$, denn $\sphericalangle ACM_1$ und $\sphericalangle ECM_3$ sind Scheitelwinkel der Geraden AE und M_1M_3.

b) $\sphericalangle M_1AC = \sphericalangle ACM_1 = \alpha$, denn $\sphericalangle M_1AC$ und $\sphericalangle ACM_1$ sind Basiswinkel im gleichschenkligen Dreieck AM_1C.
Dieses Dreieck ist gleichschenklig, da $\overline{AM_1}$ und $\overline{CM_1}$ Radien im Kreis k_1 sind.

c) $\alpha = \sphericalangle ECM_3 = \sphericalangle M_3EC$, denn $\sphericalangle ECM_3$ und $\sphericalangle M_3EC$ sind Basiswinkel im im gleichschenkligen Dreieck CEM_3.
Dieses Dreieck ist gleichschenklig, da $\overline{CM_3}$ und $\overline{EM_3}$ Radien im Kreis k_3 sind.



Daraus folgt: $\sphericalangle M_1AC = \sphericalangle M_3EC$.
$\sphericalangle M_1AC$ und $\sphericalangle M_3EC$ sind also gleich große Wechselwinkel an der Geraden AE.
Somit sind die Strecken $\overline{AM_1}$ und $\overline{EM_3}$ parallel und Behauptung 2 ist bewiesen.

Behauptung 3:

Die Strecken $\overline{AM_2}$ und $\overline{DM_3}$ sind parallel.

Beweis der Behauptung 3:

Der Beweis verläuft analog zum Beweis von Behauptung 2.

Nun zum Beweis der Aufgabe:

Nach Behauptung 1 sind $\overline{AM_1}$ und $\overline{AM_2}$ parallel. Nach den Behauptungen 2 und 3 sind also auch $\overline{DM_3}$ und $\overline{EM_3}$ parallel.
Somit liegt M_3 liegt auf der Strecke $\overline{DE}$.
Damit ist die Sehne $\overline{DE}$ ein Durchmesser des Kreises k_3 und die Aufgabe ist bewiesen.

Alternative zum Beweis von Behauptung 1:

Wir bezeichnen die Radien der drei Kreise mit r_1, r_2 bzw. r_3, die Mittelpunkte mit M_1, M_2 und M_3.
Da sich die Kreise k_1 und k_2 berühren, ist A der einzige Schnittpunkt der Kreise.
Somit ist nach der Dreiecksungleichung $r_1 + r_2 = \overline{AM_1} + \overline{AM_2} \geq \overline{M_1M_2}$.
Wäre $r_1 + r_2 > \overline{M_1M_2}$, so gäbe es auf der Verbindungsstrecke $\overline{M_1M_2}$ Punkte, die innerhalb von k_1 und k_2 liegen. Da k_1 und k_2 nur einen gemeinsamen Punkt haben, ist dies unmöglich, also $\overline{M_1M_2} = r_1 + r_2$.
Somit gilt $\overline{M_1M_2} = \overline{AM_1} + \overline{AM_2}$, daher liegt A auf der Verbindungsstrecke $\overline{M_1M_2}$.

Alternative zum Beweis der Aufgabe:

Nach dem Beweis von Behauptung 2 sind die Dreiecke AM_1C und EM_3C ähnlich (beide Dreiecke sind gleichschenklig mit Basiswinkel α).
Somit gilt $\sphericalangle CM_1A = \sphericalangle CM_3E$, denn diese beiden Winkel sind die Spitzenwinkel in den gleichschenkligen Dreiecken.
Analog gilt nach dem Beweis von Behauptung 3: $\sphericalangle AM_2B = \sphericalangle DM_3B$.

Somit $\sphericalangle CM_3E + \sphericalangle BM_3C + \sphericalangle DM_3B = \sphericalangle CM_1A + \sphericalangle BM_3C + \sphericalangle AM_2B = 180^o$, denn $\sphericalangle CM_1A$, $\sphericalangle BM_3C$ und $\sphericalangle AM_2B$ sind die Innenwinkel des Dreiecks $M_1M_2M_3$.
Da $\sphericalangle CM_3E + \sphericalangle BM_3C + \sphericalangle DM_3B = \sphericalangle DM_3E$, ist $\sphericalangle DM_3E$ also ein gestreckter Winkel.
Somit liegt der Mittelpunkt M_3 des Kreises k_3 also auf der Kreissehne $\overline{DE}$.
Daraus folgt, dass $\overline{DE}$ ein Durchmesser des Kreises k_3 ist.