Landeswettbewerb Mathematik
Baden-Württemberg
Lösungsvorschläge für die
Aufgaben der 2. Runde 2007/2008

Aufgabe 1

In der nebenstehenden Gleichung steht jeder Buchstabe für eine der Ziffern 1 bis 9, wobei keine Ziffer mehrfach vorkommt.

Zeige, dass die Zahl GHI durch 9 teilbar ist, und bestimme ihren kleinstmöglichen Wert:

$$\begin{array}{r} \mathrm{ABC} \\ \underline{+\ \mathrm{DEF}} \\ \mathrm{GHI} \end{array}$$

Lösung:

Der kleinstmögliche Wert von GHI ist 459.

1. Beweismöglichkeit:

Beweis, dass GHI durch 9 teilbar ist:

Zunächst werden die Zahlen ABC, DEF und GHI als Vielfache von 9 mit Rest dargestellt:

$\mathrm{ABC} = 9a + r \qquad \mathrm{DEF} = 9b + s \qquad \mathrm{GHI} = 9c + t$.

Hierbei sind a, b, c, r, s und t natürliche Zahlen. Für die “Neunerreste” r, s und t gilt zudem: $0 \le r,s,t \le 8$.
Aus ABC+DEF=GHI folgt somit: $9(a+b) + r + s = 9c + t$.
Somit ist $r + s - t$ durch 9 teilbar. Da $0 \le r,s,t \le 8$ gibt es nur die Möglichkeiten $r + s - t = 0$ oder $r + s - t = 9$. Zwischen r, s und t besteht also folgender Zusammenhang:

Fall 1:	$r + s = t$,	falls $r + s < 9$,
Fall 2:	$r + s = 9 + t$,	falls $r + s > 9$.

Dividiert man nun eine natürliche Zahl n durch 9, so ist der entstehende Neunerrest gleich groß wie bei der Division der Quersumme von n durch 9. Falls n z.B. dreistellig ist und $n = \mathrm{XYZ} = 100 \cdot \mathrm{X} + 10 \cdot \mathrm{Y} + \mathrm{Z} = 9 \cdot k + m$ den Neunerrest m hat, so ergibt sich für die Quersumme von *n:*

$$X + Y + Z = 9k - 99 \cdot X - 9 \cdot Y + m = 9 \cdot (k - 11 \cdot X - Y) + m.$$

Somit hat diese Quersumme ebenfalls den Neunerrest m.

Folglich haben die Quersummen von ABC, DEF und GHI die Neunerreste r, s und t.

Also gilt:

A+B+C $= 9x + r$; D+E+F $= 9y + s$; G+H+I $= 9z + t$ $(x, y, z \in \mathbb{N})$

Somit folgt A+B+C+D+E+F+G+H+I $= 9(x + y + z) + r + s + t$.

Nach Aufgabenstellung sind A,B,C,D,E,F,G,H,I genau die neun einstelligen Zahlen $1,2,3,\ldots,9$. Die Summe $1+2+3+\ldots+9$ ist 45, daher ist

$$\text{A+B+C+D+E+F+G+H+I} = 9(x+y+z)+r+s+t = 45.$$

Für die beiden Fälle ergibt sich:

In Fall 1: $9(x + y + z) + 2t = 45$;

In Fall 2: $9(x + y + z) + 9 + 2t = 45$.

Da 45 durch 9 teilbar ist, folgt in beiden Fällen $t = 0$.
Somit ist GHI $= 9c + t = 9c$. Die Zahl GHI ist also durch 9 teilbar.

Bestimmung des kleinstmöglichen Wertes für GHI:
Die Zahl GHI ist möglichst klein, wenn die Hunderterziffer G möglichst klein ist.

Fall a: G $= 1$ oder G $= 2$.
Aus ABC+DEF=GHI folgt, dass G mindestens so groß wie A+D ist.
Da A und D nicht beide 1 sein können, muss G mindestens 3 sein.
Dieser Fall ist also unmöglich.

Fall b: G $= 3$.
Wenn G $= 3$, so muss wegen ABC+DEF=GHI entweder A=1 und D=2 oder umgekehrt A=2 und D=1 sein. Außerdem darf es keinen Übertrag von der Zehnerstelle geben.
Damit es keinen Übertrag von der Zehnerstelle gibt, muss B=4 und E=5 oder B=5 und E=4 sein, denn die Ziffern 1, 2 und 3 sind ja schon verbraucht.
Außerdem darf es keinen Übertrag von der Einerstelle geben, denn andernfalls entstünde ein Übertrag von der Zehnerstelle auf die Hunderterstelle.
Jede Belegung der Einerstellen in C+F=I mit den verbleibenden Ziffern 6, 7, 8 führt aber immer zu einem Übertrag auf die Zehnerstelle.
Somit ist dieser Fall unmöglich.

Fall c: G $= 4$.
Wenn G $= 4$, so muss wegen ABC+DEF=GHI entweder A=1 und D=2 bzw. A=2 und D=1 (dann gäbe es einen Übertrag von der Zehnerstelle) oder A=1 und D=3 bzw. A=3 und D=1 sein (dann gäbe es keinen Übertrag von der Zehnerstelle).
In jedem Fall ist mindestens eine der Ziffern 2 oder 3 bereits auf einer Hunderterstelle von ABC oder DEF vergeben. Daher kann GHI nicht mehr beide Ziffern 2 *und* 3 enthalten. Somit scheiden die durch 9 teilbaren Zahlen 423 und 432 für GHI aus.
Außerdem scheiden auch 414 und 441 aus, da sie die 4 doppelt enthalten.
Schließlich scheiden auch die durch 9 teilbaren Zahlen 405 und 450 aus, da die 0 nicht vorkommen darf.
Die kleinstmögliche Zahl ist also 459.
Für 459 ergibt sich tatsächlich eine Lösung für GHI, denn **173 + 286 = 459.**

2. Beweismöglichkeit:

Bei der Addition zweier natürlicher Zahlen kann es zu sogenannten „Überträgen“ von einer Stelle auf die nächst größere Stelle kommen.
Zunächst wird untersucht, wie sich Überträge beim Addieren zweier Zahlen ABC und DEF mit ABC+DEF = GHI auf die Quersumme G+H+I der Zahl GHI auswirken:

1. Fall: Es gibt keine Überträge. Dann gilt: C+F = I, B+E = H, A+D = G.
   Daraus folgt: G+H+I = (A+D)+(B+E)+(C+F) = A+B+C+D+E+F.

2. Fall: Es gibt nur einen Übertrag von der Einer- auf die Zehnerstelle.
   Der Übertrag muss 1 sein, da für die Summe C+F < 18 gilt.
   Dann gilt: C+F–10 = I, B+E+1 = H, A+D = G.
   Daraus folgt: G+H+I = (A+D)+(B+E+1)+(C+F–10) = A+B+C+D+E+F–9.

3. Fall: Es gibt nur einen Übertrag von der Zehner- auf die Hunderterstelle.
   Der Übertrag muss 1 sein, da für die Summe B+E < 18 gilt.
   Dann gilt: C+F = I, B+E–10 = H, A+D+1 = G.
   Daraus folgt: G+H+I = (A+D+1)+(B+E–10)+(C+F) = A+B+C+D+E+F–9.

4. Fall: Es gibt einen Übertrag von der Einer- auf die Zehnerstelle und von der Zehner- auf die Hunderterstelle.
   Die Überträge müssen jeweils 1 sein, da C+F < 18, B+E+1 < 19 gilt.
   Dann gilt: C+F–10 = I, (B+E+1)–10 = H, A+D+1 = G.
   Daraus folgt: G+H+I = (A+D+1)+((B+E+1)–10)+(C+F–10) = A+B+C+D+E+F–18.

Da GHI eine dreistellige Zahl ist, kann es keinen Übertrag von der Hunderter- auf die Tausenderstelle geben, die genannten Fälle sind die einzig möglichen.

Nach Aufgabenstellung sind A,B,C,D,E,F,G,H,I genau die neun einstelligen Zahlen $1,2,3,\ldots,9$. Die Summe $1+2+3+\ldots+9$ ist 45, daher ist $A+B+C+D+E+F+G+H+I=45$.
Für die oben genannten Fälle ergibt sich daraus:

1. Fall: A+B+C+D+E+F = G+H+I
   $\Leftrightarrow$ A+B+C+D+E+F+G+H+I = 2 · (G+H+I)
   $\Leftrightarrow$ 45 = 2 · (G+H+I)
   $\Leftrightarrow$ 22,5 = (G+H+I)

2. Fall: A+B+C+D+E+F–9 = G+H+I
   $\Leftrightarrow$ A+B+C+D+E+F+G+H+I–9 = 2 · (G+H+I)
   $\Leftrightarrow$ 36 = 2 · (G+H+I)
   $\Leftrightarrow$ 18 = (G+H+I)

3. Fall: s. Fall 2

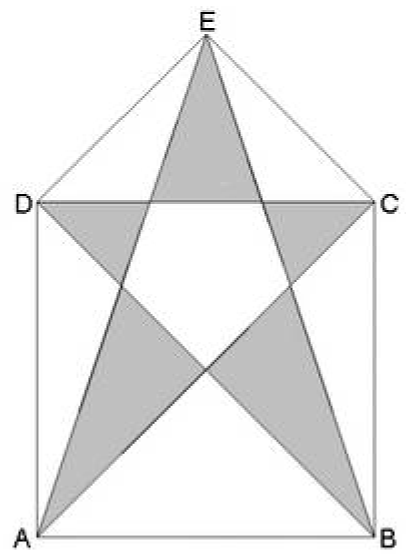
4. Fall: A+B+C+D+E+F–18 = G+H+I
   $\Leftrightarrow$ A+B+C+D+E+F+G+H+I–18 = 2 · (G+H+I)
   $\Leftrightarrow$ 27 = 2 · (G+H+I)
   $\Leftrightarrow$ 13,5 = (G+H+I)

Da die Summe G+H+I eine natürliche Zahl sein muss, gilt für alle möglichen Lösungen der Aufgabenstellung (Fälle 2 und 3): G+H+I = 18. Da eine Zahl genau dann durch 9 teilbar ist, wenn ihre Quersumme durch 9 teilbar ist, ist also GHI durch 9 teilbar.
Zur Bestimmung des kleinstmöglichen Wertes für GHI wird wie in der ersten Beweismöglichkeit gezeigt, dass die Hunderterziffer G von GHI mindestens 4 sein muss. Die erste in Frage kommende Zahl mit der Quersumme 18 ist dann 459.
Sie ergibt die gesuchte kleinstmögliche Lösung für GHI, denn **173 + 286 = 459.**

Aufgabe 2

In der Abbildung ist ABCD ein Quadrat, die Strecken DE und AC sowie BD und CE sind jeweils parallel.

Bestimme das Verhältnis der Flächeninhalte des schraffierten Sterns und des in der Mitte eingeschlossenen Fünfecks



Lösung:

Das Verhältnis der Flächeninhalte der gefärbten Sternfigur und des in der Mitte eingeschlossenen Fünfecks beträgt $5:2$.

Bezeichnungen:

Wir bezeichnen

- die Seitenlänge des gegebenen Quadrats *ABCD* mit *a*,
- den Schnittpunkt der Diagonalen *AC* und *BD* mit *P*,
- die Schnittpunkte von *BE* mit *CA* bzw. *CD* mit *Q* bzw. *R*,
- die Schnittpunkte von *AE* mit *DC* bzw. *DB* mit *S* bzw. *T*.

1. Beweismöglichkeit:

Da *ABCD* ein Quadrat ist, gilt

$\sphericalangle CPD = 90°$ und $PC = PD = \frac{1}{2} \cdot AC$.

Da außerdem *DE* parallel zu *PC* und *CE* parallel zu *PD* ist, ist das Viereck *PCED* ein Quadrat.

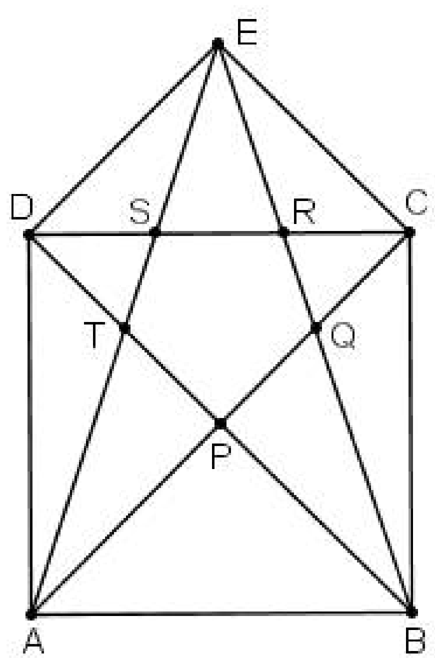
Nach dem Strahlensatz (Zentrum *S*) gilt:

$SD : SC = DE : AC = DE : (2 \cdot PC) = DE : (2 \cdot DE) = 1:2$. (1)

Analog gilt: $RC : RD = 1:2$. (2)

Aus (1) und (2) folgt: *R* und *S* dritteln die Strecke *CD*,

d.h. $DS = SR = RC = \frac{1}{3} \cdot CD = \frac{1}{3} \cdot a$ (3)



Da das Dreieck *CED* gleichschenklig und rechtwinklig ist, gilt für die Höhe h_E von E auf *CD*: $h_E = \frac{1}{2} \cdot CD = \frac{1}{2} \cdot a$. (4)

Nach (3) und (4) gilt für den Flächeninhalt A_1 des Dreiecks *RES*:

$$A_1 = \frac{1}{2} \cdot RS \cdot h_E = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} \cdot a \cdot \frac{1}{2} \cdot a = \frac{1}{12} \cdot a^2 . \tag{5}$$

Nach dem Strahlensatz (Zentrum T) gilt für die Längen der Höhen h_T von *T* auf *DS* und h'_T von *T* auf *AB*:

$$h_T : h'_T = DS : AB = \left(\frac{1}{3} \cdot a \right) : a = 1:3 .$$

Mit $h_T + h'_T = a$ folgt daraus: $h_T = \frac{1}{4} \cdot a$ und $h'_T = \frac{3}{4} \cdot a$. (6)

Nach (3) und (6) gilt für die Flächeninhalte A_2 der symmetrischen Dreiecke *SDT* und *CRQ*:

$$A_2 = \frac{1}{2} \cdot DS \cdot h_T = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} \cdot a \cdot \frac{1}{4} \cdot a = \frac{1}{24} \cdot a^2 . \tag{7}$$

Da die Höhe h_P von *P* auf *AB* die Länge $\frac{1}{2} \cdot a$ hat, gilt mit (6) für die Flächeninhalte A_3 der symmetrischen Dreiecke *PTA* und *PBQ*:

$$A_3 = A_{\Delta ABT} - A_{\Delta ABP} = \frac{1}{2} \cdot AB \cdot k_T - \frac{1}{2} \cdot AB \cdot h_P = \frac{1}{2} \cdot a \cdot \frac{3}{4} \cdot a - \frac{1}{2} \cdot a \cdot \frac{1}{2} \cdot a = \frac{1}{8} \cdot a^2 \tag{8}$$

Nach (5), (7) und (8) ist der Inhalt der gefärbten Sternfigur

$$A_{Stern} = A_1 + 2 \cdot A_2 + 2 \cdot A_3 = \frac{1}{12} \cdot a^2 + 2 \cdot \frac{1}{24} \cdot a^2 + 2 \cdot \frac{1}{8} \cdot a^2 = \frac{5}{12} \cdot a^2 \tag{9}$$

Für den Inhalt $A_{Fünfeck}$ der eingeschlossenen Fünfecksfläche gilt:

$$A_{Fünfeck} = A_{\Delta CSA} - A_{\Delta CRQ} - A_{\Delta PTA} = \frac{1}{2} \cdot CS \cdot AD - A_2 - A_3 = \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdot a \cdot a - \frac{1}{24} \cdot a^2 - \frac{1}{8} \cdot a^2 = \frac{1}{6} \cdot a^2$$

Damit ergibt sich wie behauptet

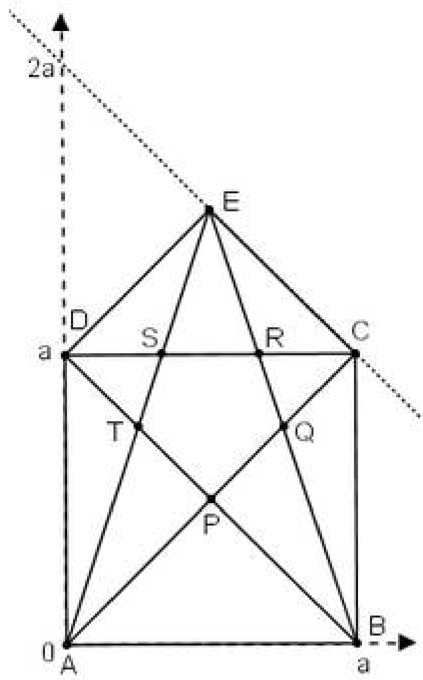
$$A_{Stern} : A_{Fünfeck} = \left(\frac{5}{12} \cdot a^2 \right) : \left(\frac{1}{6} \cdot a^2 \right) = 5:2 .$$

2. Beweismöglichkeit:

Legt man das Quadrat *ABCD* so in ein kartesisches Koordinatensystem, dass der Punkt *A* im Ursprung und der Punkt *B* auf der *x*-Achse liegt, so haben die Punkte *A*, *B*, *C* und die Koordinaten:
$A(0|0)$, $B(a|0)$, $C(a|a)$ und $D(0|a)$.

Die Geraden *AC* und *BD* haben die Gleichungen
$AC: y = x$ und $BD: y = -x + a$.

Die Geraden *DE* bzw. *CE* sind zu *AC* bzw. *BD* parallel und zu diesen jeweils um *a* nach oben verschoben.



Sie haben demnach die Gleichungen $DE: y = x + a$ und $CE: y = -x + 2a$.
Für ihren Schnittpunkt E gilt:

$$x + a = -x + 2a \Leftrightarrow x = \frac{1}{2}a.$$

Also $E\left(0{,}5a \middle| 1{,}5a\right)$.

Die Gerade AE hat also die Steigung $\frac{1{,}5a}{0{,}5a} = 3$. Es ergibt sich die Geradengleichung $AE: y = 3x$.

Für den Schnittpunkt S von DC und AE gilt $a = 3x \Leftrightarrow x = \frac{1}{3}a$, also $S\left(\frac{1}{3}a \middle| a\right)$.

Für den Schnittpunkt R von DC und BE gilt aus Symmetriegründen $R\left(\frac{2}{3}a \middle| a\right)$.

Für den Schnittpunkt T von BD und AE gilt $-x + a = 3x \Leftrightarrow x = \frac{1}{4}a$ also $T\left(\frac{1}{4}a \middle| \frac{3}{4}a\right)$.

Es ergibt sich für die Flächeninhalte der Dreiecke die folgende Tabelle:

Dreieck	**Grundlinie**	**Zugehörige Höhe**	**Flächeninhalt**
RES	$RS = \frac{1}{3}a$	$h_E = \frac{3}{2}a - a = \frac{1}{2}a$	$A_1 = \frac{1}{12}a^2$
SDT bzw. CRQ	$SD = CR = \frac{1}{3}a$	$h_T = a - \frac{3}{4}a = \frac{1}{4}a$	$A_2 = \frac{1}{24}a^2$
ABT bzw. ABQ	$AB = a$	$h'_T = \frac{3}{4}a$	$A_{3.1} = \frac{3}{8}a^2$
ABP	$AB = a$	$h_P = \frac{1}{2}a$	$A_{3.2} = \frac{1}{4}a^2$
PTA bzw. QPT			$A_3 = A_{3.1} - A_{3.2} = \frac{1}{8}a^2$

Somit $A_{Stern} = A_1 + 2 \cdot A_2 + 2 \cdot A_3 = \frac{1}{12} \cdot a^2 + 2 \cdot \frac{1}{24} \cdot a^2 + 2 \cdot \frac{1}{8} \cdot a^2 = \frac{5}{12} \cdot a^2$.
Für den Flächeninhalt $A_{Fünfeck}$ der eingeschlossenen Fünfecksfläche gilt

$$A_{Fünfeck} = A_{\Delta CSA} - A_{\Delta CRQ} - A_{\Delta PTA} = \frac{1}{2} \cdot CS \cdot AD - A_2 - A_3 = \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdot a \cdot a - \frac{1}{24} \cdot a^2 - \frac{1}{8} \cdot a^2 = \frac{1}{6} \cdot a^2$$

Damit gilt wie behauptet $A_{Stern} : A_{Fünfeck} = \left(\frac{5}{12} \cdot a^2\right) : \left(\frac{1}{6} \cdot a^2\right) = 5 : 2$.

Aufgabe 3

Für die natürlichen Zahlen a, b und c soll es außer 1 keine natürlichen Zahlen geben, die Teiler von jeder der drei Zahlen ist.

Zeige: Wenn $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}=\frac{1}{c}$ *gilt, dann ist a+b eine Quadratzahl.*

Beispiele:

- $\frac{1}{7}+\frac{1}{42}=\frac{1}{6}$.
  Die Zahlen 6, 7 und 42 haben keinen gemeinsamen Teiler, außer 1.
  Die Summe $7+42=49=7^2$ ist eine Quadratzahl.
- $\frac{1}{10}+\frac{1}{15}=\frac{1}{6}$.
  Zwar haben je zwei der drei Zahlen 6, 10, 15 einen von 1 verschiedenen gemeinsamen Teiler, es gibt aber außer 1 keinen gemeinsamen Teiler von allen drei Zahlen. Die Voraussetzungen der Aufgabe sind also erfüllt.
  In der Tat ist die Summe $10+15=25=5^2$ eine Quadratzahl.
- $\frac{1}{12}+\frac{1}{36}=\frac{1}{9}$.
  3 ist ein gemeinsamer Teiler von allen drei Zahlen 9, 12, 36. Die Voraussetzungen der Aufgabe sind also nicht erfüllt. In der Tat ist in diesem Fall auch 12+36 = 48 keine Quadratzahl.

Lösung:

Es gilt $a+b=t^2$, wobei t der größte gemeinsame Teiler von a und b ist. Insbesondere ist also $a+b$ eine Quadratzahl.

1. Beweismöglichkeit:

Zwei Zahlen x und y heißen teilerfremd, wenn es außer 1 keinen gemeinsamen Teiler von x und y gibt.

Behauptung: *Wenn zwei Zahlen x und y teilerfremd sind, so sind auch die Zahlen* $x+y$ *und* $x \cdot y$ *teilerfremd*.

Beweis der Behauptung: Angenommen $u>1$ ist ein Teiler von $x \cdot y$ und von $x+y$. Da u das Produkt $x \cdot y$ teilt, muss u mit x oder mit y gemeinsame Teiler, die größer als 1 sind, haben.

Angenommen $s>1$ ist ein gemeinsamer Teiler von x und u. Da s ein Teiler von u ist, ist s auch ein Teiler $x+y$. Damit ist s auch ein Teiler von $y=(x+y)-x$. Nach Voraussetzung sind x und y aber teilerfremd, es kann keinen gemeinsamen Teiler $s>1$ von x und y geben. Somit ergibt sich ein Widerspruch.

Analog ergibt sich ein Widerspruch, wenn u mit y gemeinsame Teiler hat. Somit ist die Behauptung bewiesen.

Wir schreiben *t* für den größten gemeinsamen Teiler der Zahlen *a* und *b*.
Dann existieren natürliche Zahlen a_1 und b_1 mit $a = a_1 \cdot t$ und $b = b_1 \cdot t$.
Da *t* der größte gemeinsame Teiler ist, sind a_1 und b_1 teilerfremd.

Die Umformung der Ausgangsgleichung ergibt:

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = \frac{1}{c} \Leftrightarrow a + b = \frac{a \cdot b}{c} \Leftrightarrow a_1 t + b_1 t = \frac{a_1 t \cdot b_1 t}{c} \Leftrightarrow (a_1 + b_1)c = a_1 b_1 t \,. \qquad (*)$$

Somit ist $a_1 + b_1$ ein Teiler des Produkts $a_1 b_1 t$. Da aber nach der Behauptung $a_1 + b_1$ teilerfremd zu $a_1 b_1$ ist, muss $a_1 + b_1$ ein Teiler von *t* sein.
Andererseits ergibt sich aus (*) auch, dass *t* ein Teiler von $(a_1 + b_1)c$ ist. Da nach Voraussetzung die drei Zahlen *a*, *b* und *c* außer 1 keinen gemeinsamen Teiler haben, ist *t* zu *c* teilerfremd. Somit ist *t* Teiler von $a_1 + b_1$.
Wenn nun $a_1 + b_1$ die Zahl *t* teilt und umgekehrt *t* die Summe $a_1 + b_1$ teilt, so folgt $a_1 + b_1 = t$.
Damit ergibt sich $a + b = a_1 t + b_1 t = (a_1 + b_1)t = t^2$. Die Summe $a + b$ ist also wie behauptet das Quadrat von *t*.

2. Beweismöglichkeit:

Der größte gemeinsame Teiler zweier natürlicher Zahlen *x* und *y* wird mit $ggT(x;y)$ bezeichnet.
Für die gegebenen Zahlen *a, b,* und *c,* die außer 1 keinen gemeinsamen Teiler haben und für die die Beziehung $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = \frac{1}{c}$ gilt, definieren wir $t = ggT(a;b)$, $y = ggT(a;c)$, $z = ggT(b;c)$.
Dann sind *t*, *y* und *z* paarweise teilerfremd, denn ein gemeinsamer Teiler von zwei dieser drei Zahlen ist ein Teiler von *a, b,* und *c.*
Da *t* ein Teiler von *a* ist, gibt es eine natürliche Zahl a_1 mit $a = a_1 \cdot t$. Da *y* ein Teiler von $a = a_1 \cdot t$ ist und *y* teilerfremd zu *t* ist, muss *y* Teiler von a_1 sein. Somit gibt es eine natürliche Zahl a' mit $a_1 = y \cdot a'$. Zusammen ergibt sich $a = t \cdot a_1 = t \cdot y \cdot a'$.
Analog gibt es auch natürliche Zahlen b' und c' mit

$$\begin{aligned} a &= t \cdot y \cdot a' \\ b &= t \cdot z \cdot b' \\ c &= y \cdot z \cdot c' \end{aligned} \qquad (1)$$

Die drei Zahlen *a'*, *b'* und *c'* sind paarweise teilerfremd, da sonst *t*, *y*, *z* keine größten gemeinsamen Teiler wären.
Die Umformung der Ausgangsgleichung ergibt:

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = \frac{1}{c} \Leftrightarrow \frac{b + a}{a \cdot b} = \frac{1}{c} \Leftrightarrow a + b = \frac{a \cdot b}{c}. \qquad (2)$$

Setzt man (1) in (2) ein, so erhält man:

$$a + b = \frac{t \cdot y \cdot a' \cdot t \cdot z \cdot b'}{y \cdot z \cdot c'} = \frac{t^2 \cdot a' \cdot b'}{c'} \qquad (3)$$

Somit muss *c'* ein Teiler von $t^2 \cdot a' \cdot b'$ sein. Nun ist aber *c'* teilerfremd zu *t*, da sonst *a, b,* und *c* einen gemeinsamen Teiler hätten. Außerdem ist *c'* wie oben vermerkt teilerfremd zu *a'* und zu *b',* also muss $c' = 1$ sein. Somit ergibt sich aus (3)

$$a + b = t^2 \cdot a' \cdot b'. \qquad (4)$$

Demnach ist also $t \cdot a'$ ein Teiler von $a+b$. Nach (1) ist $t \cdot a'$ auch ein Teiler von *a*. Also ist $t \cdot a'$ ein Teiler von $(a+b) - a = b$. Da *t* der größte gemeinsame Teiler von *a* und *b* ist, folgt $a' = 1$. Analog ergibt sich schließlich $b' = 1$.

Aus (3) folgt nun die behauptete Beziehung $a + b = t^2$. Die Summe $a+b$ ist also Quadratzahl.

Bemerkung: Aus (1) im obigen Beweis ergibt sich nun

$$a = t \cdot y$$
$$b = t \cdot z$$
$$c = y \cdot z$$

Hier $y + z = t$ und *t*, *y* und *z* sind paarweise teilerfremd.
Diese Beziehung erlaubt es, leicht viele Beispiele herzustellen.

3. Beweismöglichkeit:

Sei $c_a = ggT(c,a)$ der größte gemeinsame Teiler von *c* und *a*, analog $c_b = ggT(c,b)$ der größte gemeinsame Teiler von *c* und *b.*

Dann sind *a* und c_b teilerfremd, da es außer 1 keinen gemeinsamen Teiler von *a*, *b* und *c* gibt. Analog ist auch *b* und c_a teilerfremd.

Außerdem gibt es eine natürliche Zahl *z* mit $c = c_a c_b z$: Da c_a ein Teiler von *c* ist, gibt es eine natürliche Zahl *w* mit $c = c_a w$. Da c_b ein Teiler von $c = c_a w$ ist und c_b und c_a teilerfremd sind, ist c_b ein Teiler von *w.* Es gibt also eine natürliche Zahl *z* mit $w = c_b z$. Somit $c = c_a w = c_a c_b z$.

Multipliziert man die beiden Seiten der Ausgangsgleichung $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = \frac{1}{c}$ mit dem Produkt *abc*, so ergibt sich $ac + bc = ab$ bzw. $(a+b)c = ab$.

Angenommen für die Zahl *z* mit $c = c_a c_b z$ gilt $z > 1$. Wegen $(a+b)c = a \cdot b$ teilt *z* das Produkt $a \cdot b$. Somit teilt jeder Primteiler *p* von *z* entweder *a* oder *b*. Wenn *p* z.B. *a* teilt, so kann *p* nicht *b* teilen, da sonst *p* Teiler von allen drei Zahlen *a, b* und *c* ist. Der Teiler $c_a p$ von *c* ist wegen $(a+b)c = a \cdot b$ aber Teiler des Produkts $a \cdot b$. Da $c_a p$ teilerfremd zu *b* ist, ist $c_a p$ Teiler von *a* und somit ein gemeinsamer Faktor von *c* und *a*, der größer als c_a ist. Dies widerspricht der Definition von c_a als größtem gemeinsamen Teiler von *a* und *c*. Analog ergibt sich ein Widerspruch wenn *p* die Zahl *b* teilt. Somit muss $z = 1$ sein und es folgt $c = c_a c_b$.

Da $c_a = ggT(c,a)$ und $c_b = ggT(c,b)$ gibt es natürliche Zahlen *x* und *y* mit $a = c_a \cdot x$ und $b = c_b \cdot y$. Somit gilt

$$a+b=\frac{ab}{c}=\frac{ab}{c_a c_b}=\frac{c_a x c_b y}{c_a c_b}=xy\ .$$

Demnach ist *x* ein Teiler von *a* und von $a+b$. Somit ist *x* auch ein Teiler von $(a+b)-a=b=c_b \cdot y$. Da *x* und c_b nach Behauptung 1 teilerfremd sind, muss *x* Teiler von *y* sein.
Analog ist *y* ein Teiler von *x*, da *y* sowohl *b*, also auch $a+b$ teilt.
Somit gilt $x=y$. Da c_a und c_b teilerfremd sind, ist $x=y=t$ der größte gemeinsame Teiler *t* von *a* und *b*.

Also ist $a+b=t^2$ wie behauptet eine Quadratzahl.

4. Beweismöglichkeit:

Die Umformung der Ausgangsgleichung ergibt:

$$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}=\frac{1}{c} \Leftrightarrow a+b=\frac{a \cdot b}{c}. \qquad (*)$$

Sei *p* eine Primzahl, die $a+b$ teilt. Nach (*) teilt *p* dann auch das Produkt $a \cdot b$, also teilt *p* mindestens eine der beiden Zahlen *a* oder *b*. Wenn *p* z.B. *a* teilt, so teilt *p* aber sowohl *a* als auch $a+b$. Dann teilt *p* aber auch $b=(a+b)-a$. Somit teilt *p* immer sowohl *a* als auch *b*. Da alle drei Zahlen außer 1 keine gemeinsamen Teiler haben, kann *p* nicht *c* teilen.

Sei p^s die höchste *p*-Potenz, die sowohl *a* als auch *b* teilt. Dann teilt p^{2s} das Produkt $a \cdot b$. Da *p* nicht *c* teilt, teilt p^{2s} auch $\frac{a \cdot b}{c}$. Nach (*) teilt p^{2s} die Summe $a+b$.

Zum Primteiler *p* von $a+b$ ist aber p^{2s} die höchste Primzahlpotenz, die Teiler von $a+b$ ist: Würde nämlich sogar p^{2s+1} die Summe $a+b$ teilen, so würde wegen (*) p^{2s+1}auch $a \cdot b$ teilen. Damit müsste die Potenz p^{s+1} mindestens eine der beiden Zahlen *a* oder *b* teilen. Würde p^{s+1} z.B. *a* teilen, so wäre p^{s+1} ein Teiler von *a* und von $a+b$, also auch ein Teiler von *b*. Das widerspricht aber der Annahme, dass p^s die höchste *p*-Potenz ist, die sowohl *a* als auch *b* teilt.

Damit wurde bewiesen, dass jeder Primteiler *p* von $a+b$ in der Primfaktorzerlegung von $a+b$ mit einer geraden Potenz vorkommt. Daraus folgt unmittelbar, dass $a+b$ eine Quadratzahl ist, denn

$$a+b=p_1^{2s_1} \cdot \ldots \cdot p_k^{2s_k} = \left(p_1^{s_1} \cdot \ldots \cdot p_k^{s_k}\right)^2 .$$

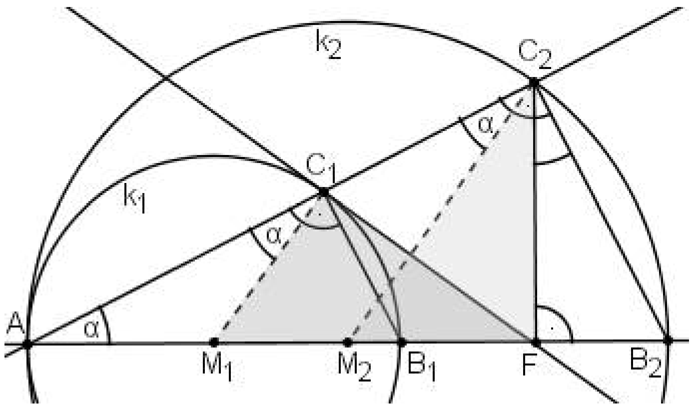
Aufgabe 4

Zwei Kreise k_1 und k_2 mit den Mittelpunkten M_1 und M_2 und den Radien r_1 und r_2 ($r_1<r_2<2\cdot r_1$) berühren sich innen in einem Punkt A.

Die Gerade M_1M_2 schneidet k_1 und k_2 außer in A noch in B_1 bzw. B_2.
Eine weitere Gerade durch A scheidet k_1 und k_2 noch in C_1 bzw. C_2.
Die Senkrechte zu M_1M_2 durch C_2 schneidet M_1M_2 in F.

Zeige: FC_1 ist genau dann Tangente an k_1, wenn F Mittelpunkt von B_1B_2 ist.

1. Beweismöglichkeit:



Sei $\sphericalangle M_1AC_1 = \alpha$.

Aus $M_1A = M_1C_1$ folgt
$\sphericalangle AC_1M_1 = \sphericalangle M_1AC_1 = \alpha$. (1)

Aus $M_2A = M_2C_2$ folgt
$\sphericalangle AC_2M_2 = \sphericalangle M_1AC_2 = \alpha$. (2)

Aus (1) und (2) ergibt sich
$\sphericalangle C_1M_1A = \sphericalangle C_2M_2A = 180° - 2\alpha$.

Also ist $\sphericalangle FM_1C_1 = \sphericalangle FM_2C_2 = 2\alpha$. (3)

Da C_1 auf dem Thaleskreis k_1 über AB_1 und C_2 auf dem Thaleskreis k_2 über AB_2 liegt, gilt $\sphericalangle AC_1B_1 = \sphericalangle AC_2B_2 = 90°$. (4)

Damit ergeben sich folgende Äquivalenzen:

FC_1 ist Tangente an k_1

$\Leftrightarrow$ $\sphericalangle M_1C_1F = 90°$

$\Leftrightarrow$ $\sphericalangle B_1C_1F = \sphericalangle M_1C_1F - \sphericalangle M_1C_1B_1 = 90° - (90° - \alpha) = \alpha$

$\Leftrightarrow$ $\sphericalangle FC_1C_2 = 90° - \alpha = \sphericalangle C_1C_2F$ (Winkelsumme im Dreieck AFC_2)

$\Leftrightarrow$ $FC_1 = FC_2$ (*)

$\Leftrightarrow$ Die Dreiecke M_1FC_1 und M_2FC_2 sind kongruent
(Kongruenzsatz SWW, wegen $\sphericalangle M_1C_1F = \sphericalangle C_2FM_2 = 90°$ und (3))

$\Leftrightarrow$ $M_1F = M_2C_2 = r_2$

$\Leftrightarrow$ $B_1F = r_2 - r_1 = \dfrac{2\cdot r_2 - 2\cdot r_1}{2} = \dfrac{AB_2 - AB_1}{2}$

$\Leftrightarrow$ F ist Mittelpunkt von B_1B_2.

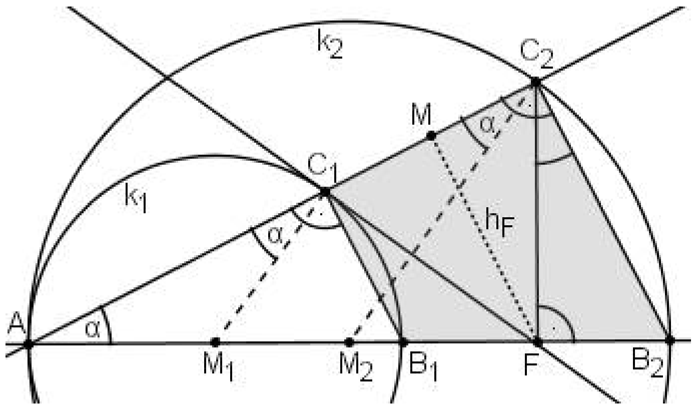
Variante: Ab (*) kann man auch folgendermaßen argumentieren:

Das Viereck $B_1B_2C_2C_1$ ist ein Trapez mit B_1C_1 parallel und $FC_1 = FC_2$

$\Leftrightarrow$ Die Höhe h_F von F auf C_1C_2 teilt C_1C_2 in dessen Mitte M und ist parallel zu B_1C_1 und B_2C_2

$\Leftrightarrow$ h_F ist Mittelparallele in dem Trapez $B_1B_2C_2C_1$

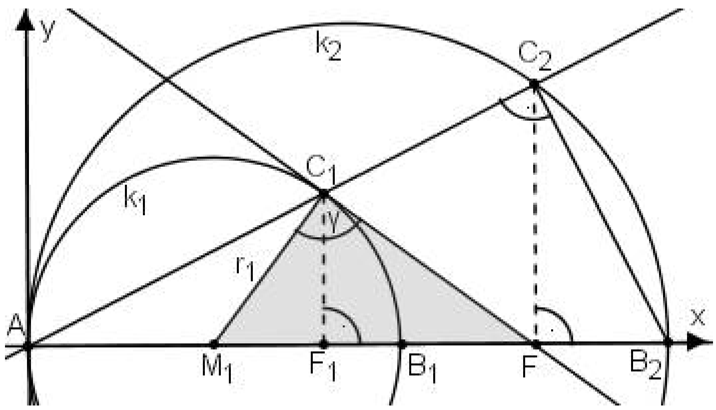
$\Leftrightarrow$ F ist Mittelpunkt von B_1B_2.



2. Beweismöglichkeit:

Mit F_1 bezeichnen wir den Fußpunkt der Höhe von C_1 auf AB_1.

Die zentrische Streckung mit Zentrum A und Streckungsfaktor $\frac{r_1}{r_2}$ bildet k_2 auf k_1, C_2 auf C_1 und F auf F_1 ab.



Legt man über die Figur ein Koordinatensystem, so dass A der Ursprung ist und B_2 auf der x-Achse liegt, so gilt:

Wird die x-Koordinate von C_2 und F mit x bezeichnet, so ist $\frac{r_1}{r_2} \cdot x$ die x-Koordinate von C_1 und F_1

Da B_1 die x-Koordinate $2r_1$ und B_2 die x-Koordinate $2r_2$ hat, ist $\frac{2 \cdot r_1 + 2 \cdot r_2}{2} = r_1 + r_2$ die x-Koordinaten des Mittelpunkts von B_1B_2. Dass der Mittelpunkt von B_1B_2 mit F übereinstimmt, bedeutet nun $x = r_1 + r_2$. Es ist also $x = r_1 + r_2$ zu zeigen.

Die Gerade C_1F ist genau dann eine Tangente an den Kreis k_1, wenn $\sphericalangle M_1C_1F = 90°$, wenn also das Dreieck M_1FC_1 rechtwinklig ist.

Variante 1:

Das Dreieck M_1FC_1 ist genau dann rechtwinklig, wenn $M_1C_1^2 = M_1F_1 \cdot M_1F$ (Kathetensatz).

Da $M_1C_1 = r_1$, $M_1F_1 = \frac{r_1}{r_2} \cdot x - r_1$ und $M_1F = x - r_1$, bedeutet dies:

$$r_1^2 = \left(\frac{r_1}{r_2} \cdot x - r_1 \right) \cdot (x - r_1) = \frac{r_1}{r_2} \cdot x^2 - \frac{r_1^2}{r_2^2} \cdot x - r_1 \cdot x + r_1^2 .$$

Subtrahiert man zunächst auf beiden Seiten der Gleichung r_1^2 und multipliziert dann mit $\frac{r_2}{x \cdot r_1}$, so erhält man: $0 = x - r_1 - r_2$ oder $x = r_1 + r_2$.

Dies bedeutet, dass *F* der Mittelpunkt der Strecke B_1B_2 ist.

Variante 2:

Das Dreieck M_1FC_1 ist genau dann rechtwinklig, wenn $C_1F_1^2 = M_1F_1 \cdot F_1F$ (Höhensatz).

Da $M_1F_1 = \frac{r_1}{r_2} \cdot x - r_1$, $F_1F = x - \frac{r_1}{r_2} \cdot x$ und $C_1F_1^2 = r_1^2 - M_1F_1^2$ (Satz von Pythagoras) ergibt sich:

$$r_1^2 - \left(\frac{r_1}{r_2} \cdot x - r_1 \right)^2 = \left(\frac{r_1}{r_2} \cdot x - r_1 \right) \cdot \left(x - \frac{r_1}{r_2} \cdot x \right)$$

Durch Umformen dieser Gleichung ergibt sich

$$r_1^2 - \frac{r_1^2}{r_2^2} \cdot x^2 + 2 \cdot \frac{r_1^2}{r_2} \cdot x - r_1^2 = \frac{r_1}{r_2} \cdot x^2 - \frac{r_1^2}{r_2^2} \cdot x^2 - r_1 \cdot x + \frac{r_1^2}{r_2} \cdot x$$

oder $\frac{r_1^2}{r_2} \cdot x = \frac{r_1}{r_2} \cdot x^2 - r_1 \cdot x$ Durch Multiplikation dieser Gleichung mit $\frac{r_2}{r_1 \cdot x}$ folgt $r_1 = x - r_2$ oder $x = r_1 + r_2$. Dies bedeutet, dass *F* der Mittelpunkt der Strecke B_1B_2 ist.

Variante 3:

Das Dreieck M_1FC_1 ist genau dann rechtwinklig, wenn das Produkt der Steigungen der Geraden M_1C_1 und FC_1 gleich -1 ist.

Da die Geraden M_1C_1 und FC_1 die Steigungen $\frac{F_1C_1}{M_1F_1}$ und $-\frac{F_1C_1}{F_1F}$ haben, bedeutet dies $\frac{F_1C_1}{M_1F_1} \cdot \left(-\frac{F_1C_1}{F_1F} \right) = -1$ oder $C_1F_1^2 = M_1F_1 \cdot F_1F$.

Nach Variante 2 ist diese Beziehung aber äquivalent dazu, dass *F* der Mittelpunkt der Strecke B_1B_2 ist.