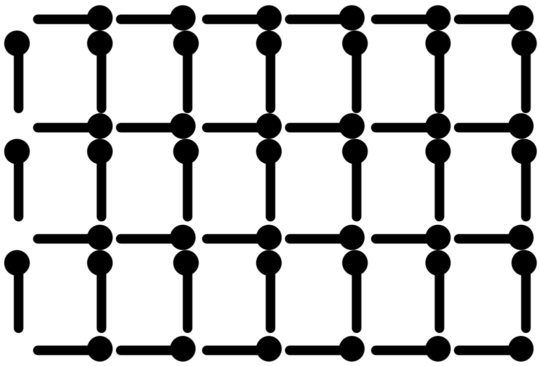
Landeswettbewerb Mathematik
Baden-Württemberg
Lösungsvorschläge für die
Aufgaben der 2. Runde 2006/2007

Aufgabe 1



Aus Streichhölzern wird wie in der Abbildung ein (6×3) – Rechteckgitter gelegt. Für die ganze Figur sind $6^2 + 3^2$ Streichhölzer nötig.

Zeige, dass es beliebig viele (a×b) – Rechteckgitter dieser Art gibt, bei denen die erforderliche Anzahl von Streichhölzern $a^2 + b^2$ beträgt.

Lösung:

Sei $u > 1$ eine beliebige natürliche Zahl und $a = \frac{1}{2} \cdot u \cdot (u+1)$, $b = \frac{1}{2} \cdot u \cdot (u-1)$.
Dann benötigt man für das $(a \times b)$ – Rechteckgitter in der beschriebenen Form $a^2 + b^2$ Streichhölzer. Somit gibt es unendlich viele solche Rechteckgitter.

Beweis:

Für die $b+1$ Reihen mit waagerechten Streichhölzern benötigt man $a \cdot (b+1)$ Hölzer.
Für die $a+1$ Spalten mit senkrechten Streichhölzern benötigt man $(a+1) \cdot b$ Hölzer.
Für ein $(a \times b)$ – Rechteckgitter sind demnach $(a+1) \cdot b + a \cdot (b+1)$ Hölzer erforderlich.
Seien nun für eine beliebige Zahl $u > 1$ die Zahlen a und b gegeben durch
$a = \frac{1}{2} \cdot u \cdot (u+1)$ und $b = \frac{1}{2} \cdot u \cdot (u-1)$.
Es ist zu zeigen, dass für jede Wahl von u>1 für diese Zahlen an und natürliche Zahlen sind und dass $(a+1) \cdot b + a \cdot (b+1) = a^2 + b^2$ gilt.

Ist u ungerade, so sind u+1 und u – 1 gerade, ist u gerade, so sind u+1 und u – 1 ungerade. Deshalb sind u·(u+1) und u·(u – 1) gerade und daher a und b natürlich.
Aus $a = \frac{1}{2} \cdot u \cdot (u+1)$ und $b = \frac{1}{2} \cdot u \cdot (u-1)$ folgt $a + b = u^2$ und $a - b = u$.
Somit folgt

$$(a-b)^2 = u^2 = a + b \quad \text{bzw.} \quad a^2 + b^2 - 2ab = a + b.$$

Daraus ergibt sich

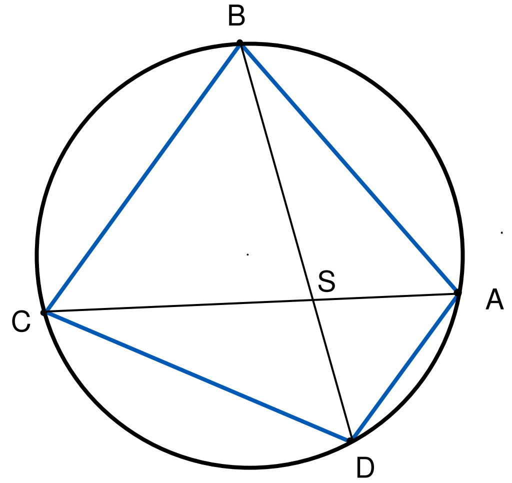
$$a^2 + b^2 = ab + b + ab + a = (a+1) \cdot b + a \cdot (b+1).$$

Dies war zu zeigen.

Aufgabe 2

Im Sehnenviereck ABCD mit dem Diagonalenschnittpunkt S gilt $\overline{AB} = \overline{BC} = \overline{CD}$ *sowie* $\overline{AD} + \overline{AS} = \overline{AB}$.

Bestimme die Größen der Innenwinkel des Vierecks.



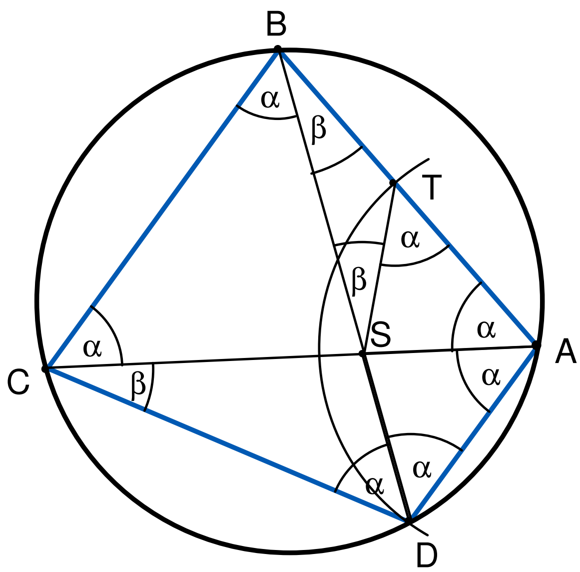
Lösung:

Die Innenwinkelweiten im Viereck *ABCD* sind

$\sphericalangle BAD = \sphericalangle ADC = \frac{4}{7} \cdot 180°$ und $\sphericalangle CBA = \sphericalangle DCB = \frac{3}{7} \cdot 180°$.

1. Lösungsmöglichkeit:

Wir bezeichnen den Winkel $\sphericalangle CAD$ wie in der nebenstehenden Zeichnung mit α, den Winkel $\sphericalangle DBA$ mit β.



Behauptung:
Das Dreieck SDA ist gleichschenklig.

Beweis der Behauptung:

- $\sphericalangle CAD = \sphericalangle CBD = \alpha$, denn beide Winkel sind Umfangswinkel über dem Bogen $\overset{\frown}{CD}$ (Umfangswinkelsatz).
- $\sphericalangle CBD = \sphericalangle BDC = \alpha$, denn diese beiden Winkel sind Basiswinkel im gleichschenkligen Dreieck *BCD*.
- $\sphericalangle BDC = \sphericalangle BAC = \alpha$, denn beide Winkel sind Umfangswinkel über dem Bogen $\overset{\frown}{BC}$ (Umfangswinkelsatz).
- $\sphericalangle BAC = \sphericalangle ACB = \alpha$, denn beide Winkel sind Basiswinkel im gleichschenkligen Dreieck *ABC*.
- $\sphericalangle ACB = \sphericalangle ADB = \alpha$, denn beide Winkel sind Umfangswinkel über dem Bogen $\overset{\frown}{AB}$.

Das Dreieck *SDA* ist also gleichschenklig, denn die beiden Winkelweiten $\sphericalangle ADS$ und $\sphericalangle SAD$ stimmen überein. Damit ist die Behauptung bewiesen.

Der Punkt *T* liege nun auf der Strecke *AB*, so dass $\overline{AT} = \overline{AD}$. Dann sind die beiden Dreiecke *SAT* und *SDA* nach dem Kongruenzsatz SWS kongruent, denn $\overline{TA} = \overline{AD}$, $\sphericalangle TAS = \sphericalangle SAD = \alpha$ und *SA* ist eine gemeinsame Seite. Somit ist nach der Behauptung auch das Dreieck *SAT* gleichschenklig mit $\overline{AS} = \overline{ST}$ und $\sphericalangle STA = \sphericalangle TAS = \alpha$.

Wegen der Voraussetzung $\overline{AD} + \overline{AS} = \overline{AB}$ (Aufgabenstellung), folgt aus $\overline{AD} = \overline{AT}$ und $\overline{AT} + \overline{TB} = \overline{AB}$ auch $\overline{TB} = \overline{AS} = \overline{ST}$. Somit ist auch das Dreieck *BST* gleichschenklig.
Dann ist $\sphericalangle TSB = \beta$, denn $\sphericalangle SBT$ und $\sphericalangle TSB$ sind Basiswinkel im gleichschenkligen Dreieck *BST*. Aus der Winkelsumme im Dreieck *BDA* ergibt sich $\beta = 180° - 3 \cdot \alpha$.
Außerdem ist $\sphericalangle BTS = 180° - \alpha$, denn $\sphericalangle BTS$ ist Nebenwinkel von $\sphericalangle STA = \alpha$.

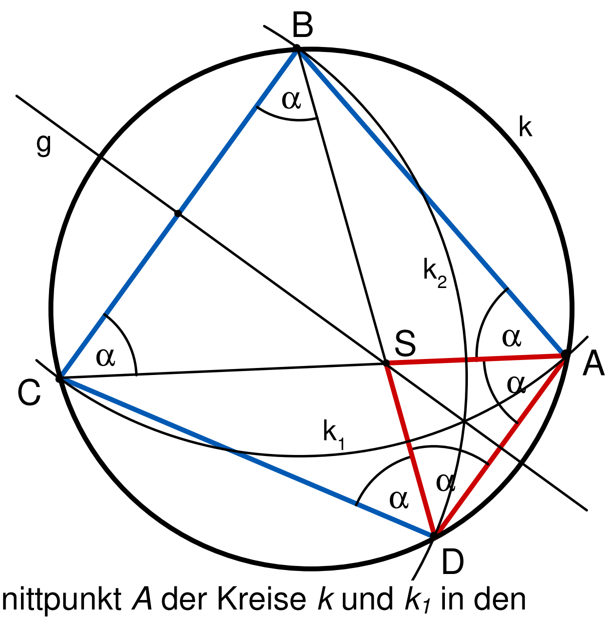
Für die Winkelsumme im gleichschenkligen Dreieck *BST* ergibt sich nun
$2\beta + 180° - \alpha = 2 \cdot (180° - 3 \cdot \alpha) + 180° - \alpha = 540° - 7\alpha = 180°$.

Also $\alpha = \frac{360°}{7} = \frac{2}{7} \cdot 180°$ und $\beta = 180° - 3\alpha = \frac{1}{7} \cdot 180°$.
Um die Innenwinkel im Viereck ABCD zu berechnen fehlt noch $\sphericalangle DCA$. Es ist $\sphericalangle DCA = \beta$, denn $\sphericalangle DCA$ und $\sphericalangle DBA = \beta$ sind Umfangswinkel über dem Bogen $\overset{\frown}{DA}$.

Somit sind die Innenwinkelweiten im Viereck *ABCD*:
$\sphericalangle BAD = \sphericalangle ADC = 2\alpha = \frac{4}{7} \cdot 180°$ und $\sphericalangle CBA = \sphericalangle DCB = \alpha + \beta = \frac{3}{7} \cdot 180°$.

Variante zum Beweis der Behauptung in der 1. Lösungsmöglichkeit (ohne Umfangswinkelsatz):

Die Punkte *A*, *B*, *C*, *D* liegen auf einem gemeinsamen Kreis k.
Da $\overline{BC} = \overline{AB}$ und $\overline{BC} = \overline{CD}$ liegt *A* auf dem Kreis k_1 um *B* vom Radius $\overline{BC}$ und *D* auf dem Kreis k_2 um *C* vom Radius $\overline{BC}$.
Bei der Spiegelung der Strecke *BC* an der Mittelsenkrechten *g* der Strecke *BC* ist der Punkt *C* das Bild des Punktes *B* und der Kreis k_2 das Bild des Kreises k_1. Der Kreis *k* ist Fixkreis der Spiegelung.



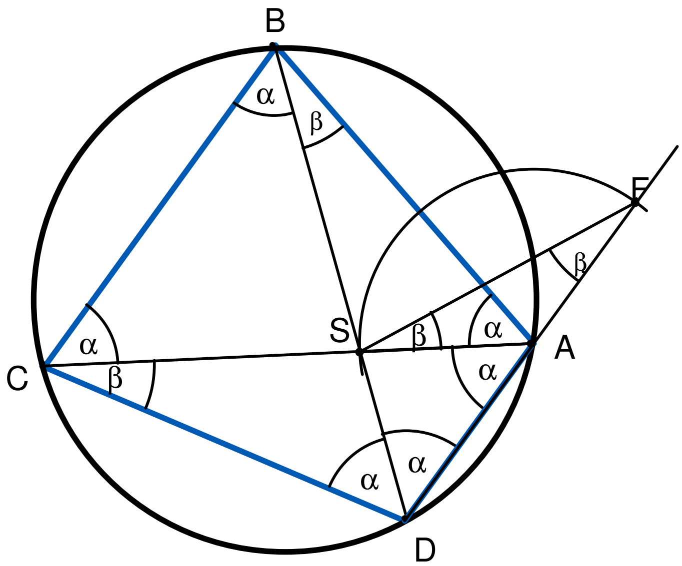
Somit geht bei dieser Spiegelung der Schnittpunkt *A* der Kreise *k* und k_1 in den Schnittpunkt *D* der Bildkreise *k* und k_2 über. *D* ist somit der Bildpunkt von *A* bei dieser Spiegelung. Damit ist die Strecke *AD* orthogonal zur Spiegelachse *g* bzw. parallel zur Strecke *BC*.

Daraus folgt: Das Sehnenviereck *ABCD* ist ein achsensymmetrisches Trapez.
Da der Schnittpunkt *S* der Vierecksdiagonalen auf der Spiegelachse liegt, ist *g* Symmetrieachse des Dreiecks *SDA*, dieses ist also achsensymmetrisch und somit gleichschenklig.
Bezeichnet man den Winkel $\sphericalangle CAD$ wieder mit α, so ergibt sich

- $\sphericalangle ADB = \alpha$, denn $\sphericalangle CAD$ und $\sphericalangle ADB$ liegen symmetrisch bezüglich der Spiegelachse *g*.
- $\sphericalangle ACB = \alpha$, denn $\sphericalangle CAD$ und $\sphericalangle ACB$ sind Wechselwinkel an den Parallelen *BC* und AD.
- $\sphericalangle BAC = \alpha$, denn $\sphericalangle ACB$ und $\sphericalangle BAC$ sind Basiswinkel im gleichschenkligen Dreieck *ABC*.

Ähnlich folgt aus Symmetriegründen $\sphericalangle CBD = \sphericalangle BDC = \alpha$.
Damit ist die Behauptung aus der 1. Lösungsmöglichkeit bewiesen. Der Rest des Beweises erfolgt wie in der 1. Lösungsmöglichkeit.

2. Lösungsmöglichkeit:



Sei *F* sei der Schnittpunkt des Kreises um *A* mit Radius $\overline{AS}$ und der Verlängerung der Strecke *AD* über *A* hinaus.
Der Winkel $\sphericalangle CAD$ sei wieder mit α bezeichnet. Wie im ersten Lösungsvorschlag oder der Variante dazu, erkennt man, dass der Winkel α an den in der Zeichnung markierten Stellen vorliegt.
Die Dreiecke *BSA* und *FSD* sind nach dem Kongruenzsatz SWS kongruent, denn $\overline{AS} = \overline{DS}$, $\overline{AB} = \overline{DA} + \overline{AS} = \overline{DA} + \overline{AF} = \overline{DF}$ und der eingeschlossene Winkel ist beides mal α.
Aus der Kongruenz der Dreiecke *BSA* und *FSA* folgt $\sphericalangle DBA = \sphericalangle SFA = \beta$.
Es ist auch $\sphericalangle DCA = \beta$, denn $\sphericalangle DCA$ und $\sphericalangle SBT = \sphericalangle DBA$ sind Umfangswinkel über dem Bogen $\overset{\frown}{DA}$.
Da das Dreieck *SAF* gleichschenklig ist, ist $\sphericalangle ASF = \sphericalangle SFA = \beta$.
Aus der Winkelsumme im Dreieck *DAB* ergibt sich $\beta = 180° - 3\alpha$.
Aus der Winkelsumme im gleichschenkligen Dreieck *SAF* ergibt sich $2\beta + 180° - \alpha = 180°$ oder $\alpha = 2\beta$.
Durch Einsetzen von $\alpha = 2\beta$ in $\beta = 180° - 3\alpha$ ergibt sich $7\beta = 180°$ oder $\beta = \frac{1}{7} \cdot 180°$. Somit ist $\alpha = 2\beta = \frac{2}{7} \cdot 180°$.

Die Innenwinkel im Viereck *ABCD* sind also
$\sphericalangle BAD = \sphericalangle ADC = 2\alpha = \frac{4}{7} \cdot 180°$ und $\sphericalangle CBA = \sphericalangle DCB = \alpha + \beta = \frac{3}{7} \cdot 180°$.

Aufgabe 3

Für welche natürlichen Zahlen n nimmt der größte gemeinsame Teiler von n^2+1 und $(n+3)^2$ seinen maximalen Wert an?

Lösung:

Der größte gemeinsame Teiler von n^2+1 und $(n+3)^2$ nimmt seinen maximalen Wert 50 für die Zahlen $n=50\cdot m+7$ (*m* eine beliebige natürliche Zahl) an.

Beweis:

Es muss gezeigt werden, dass
(1) 50 der maximal mögliche Wert für den größten gemeinsamen Teiler von n^2+1 und $(n+3)^2$ ist;
(2) für die Zahlen der Form $n=50\cdot m+7$ der größte gemeinsame Teiler von n^2+1 und $(n+3)^2$ tatsächlich 50 ist;
(3) für alle natürlichen Zahlen, die nicht die Form $50\cdot m+7$ haben, dieser größte gemeinsame Teiler von 50 verschieden ist.

Zum Beweis von (1):

Sei *t* ein gemeinsamer Teiler von n^2+1 und $(n+3)^2$. Dann existieren natürliche Zahlen *p* und *q* mit

(I) $\quad t\cdot p=n^2+1$

(II) $\quad t\cdot q=(n+3)^2=n^2+6n+9$

Subtrahiert man Gleichung (I) von Gleichung (II) so ergibt sich

(II)-(I) $\quad t\cdot q-t\cdot p=6n+8$ oder $6n=t\cdot(q-p)-8$.

Durch Quadrieren dieser Gleichung und Addition von 36 auf beiden Seiten ergibt sich

$$36\cdot\left(n^2+1\right)=t^2(q-p)^2-16t(q-p)+100.$$

Aus $n^2+1=t\cdot p$ folgt

$$36\cdot tp-t^2(q-p)^2+16t(q-p)=100.$$

Die linke Seite dieser Gleichung ist durch *t* teilbar, also muss auch 100 durch *t* teilbar sein. Der größte gemeinsame Teiler ist also ein Teiler von 100.

Für *t* = 100 gilt nach Division von $36\cdot tp-t^2(q-p)^2+16t(q-p)=100$ durch *t* = 100:

$$36p-100(q-p)^2+16(q-p)=1$$

Die linke Seite dieser Gleichung ist gerade, die rechte ungerade. Also ist *t* = 100 als gemeinsamer Teiler von n^2+1 und $(n+3)^2$ unmöglich. Somit ist der größte mögliche gemeinsame Teiler höchstens 50.

Für $n=7$ ist aber $n^2+1=50$, $(n+3)^2=100$. Der größte gemeinsame Teiler ist also 50. Somit kommt 50 als größter gemeinsamer Teiler wirklich vor und der maximale Wert für diesen größten gemeinsamen Teiler ist somit 50. Damit ist (1) beweisen.

Zum Beweis von (2):

Für $n=50m+7$ (m beliebige natürliche Zahl) ist
$(n+3)^2=(50m+10)^2=2500m^2+1000m+100$ und
$n^2+1=(50m+7)^2+1=2500m^2+700m+50$.
Beide Zahlen sind durch 50 teilbar, also ist der größte gemeinsame Teiler mindestens 50. Da er nach dem Beweis von (1) nicht größer als 50 sein kann, nimmt er für alle Zahlen der Form $n=50m+7$ den maximalen Wert 50 an. Damit ist (2) bewiesen.

Zum Beweis von (3):

Sei $n=50m+x$ (m beliebige natürliche Zahl, $0\le x<49$).

Dann ist $n^2+1=(50m+x)^2+1=2500m^2+100mx+x^2+1$. Da $2500m^2+100mx$ eine Hunderterzahl ist, ist $2500m^2+100mx+x^2+1$ nur dann durch 50 teilbar, wenn x^2 mit den Ziffern 49 oder 99 endet. Eine Quadratzahl x^2 endet aber nur auf 9, wenn x auf 3 oder 7 endet.

Wenn x auf 3 endet, so endet $n+3$ auf 6 und damit endet auch $(n+3)^2$ auf 6, ist also sicher nicht durch 50 teilbar. Es muss also x auf 7 enden.

Von den fünf verbleibenden Möglichkeiten für x, nämlich 7, 17, 27, 37 und 47 endet aber nur für $x=7$ die Quadratzahl x^2 auf 49.

Damit ist gezeigt, dass nur für die Zahlen der Form $n=50m+7$ der maximale Wert 50 für den größte gemeinsamen Teiler von n^2+1 und $(n+3)^2$ möglich ist. Somit ist auch (3) beweisen.

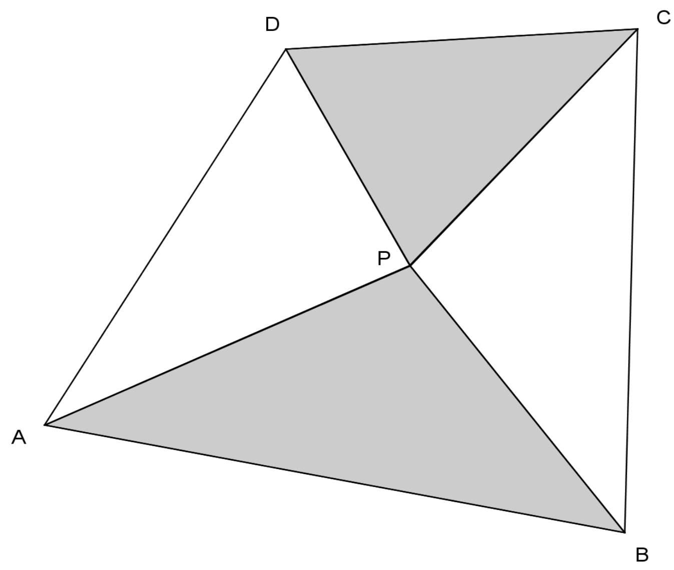
Lösungsvariante zum Beweis von (1):

Sei s ein gemeinsamer Teiler von $n+3$ und n^2+1. Dann gibt es natürliche Zahlen x, y mit $n+3=x\cdot s$ und $n^2+1=y\cdot s$. Aus $n=xs-3$ folgt durch Einsetzen:
$n^2+1=(xs-3)^2+1=x^2s^2-6xs+10=ys$. Somit ist 10 durch s teilbar. 10 ist also der maximal mögliche Teiler von $n+3$ und n^2+1. Damit ist $10^2=100$ der maximal mögliche Teiler von $(n+3)^2$ und n^2+1. n^2+1 kann aber nicht durch 100 teilbar sein, denn dann wäre diese Zahl insbesondere auch durch 4 teilbar. Somit müsste n^2 bei der Division durch 4 den Rest 3 haben. Alle Quadratzahlen haben aber bei der Division durch 4 den Rest 0 oder den Rest 1: wenn n gerade ist, so ist n^2 durch 4 teilbar, wenn $n=2m+1$ ungerade ist, so ist $n^2=(2m+1)^2=4m^2+4m+1$ und lässt also bei der Division durch 4 den Rest 1. Somit ist 50 der maximal möglich Teiler von $(n+3)^2$ und n^2+1. Damit ist (1) bewiesen.

Aufgabe 4

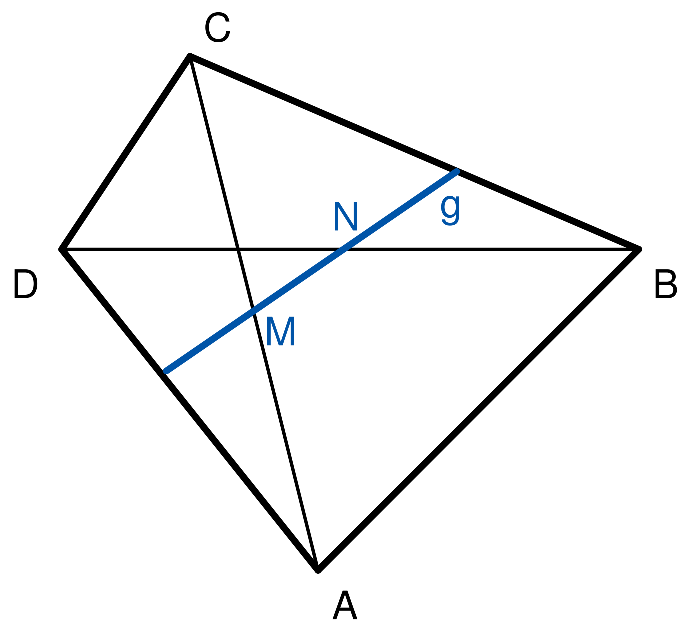
Gegeben ist ein konvexes Viereck ABCD, das kein Parallelogramm ist.

Für welche Punkte P im Viereck ABCD ist die Summe der Flächeninhalte der Dreiecke ABP und CDP ebenso groß wie die Summe der Flächeninhalte der Dreiecke DAP und BCP?



Lösung:

Sei *M* der Mittelpunkt der Diagonalen *AC*, *N* der Mittelpunkt der Diagonalen *BD*. Für alle Punkte, die im Viereck *ABCD* auf der Geraden *g* durch *M* und *N* liegen, ist die in der Aufgabe geforderte Eigenschaft erfüllt.

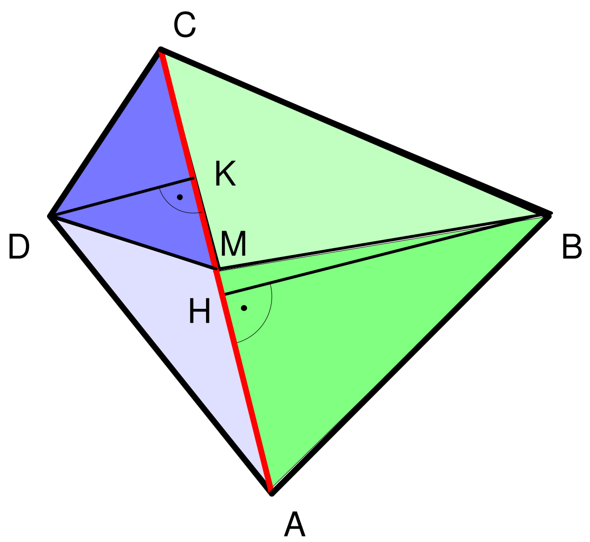


1. Lösungsmöglichkeit:

Schritt 1: Die Mittelpunkte *M* und *N* der Diagonalen haben die geforderte Eigenschaft.

Beweis von Schritt 1:

Die Dreiecke *ABM* und *BCM* haben den gleichen Flächeninhalt, da die Grundseiten *AM* und *MC* gleich lang sind und beide die gemeinsame Höhe *HB* haben. Die Dreiecke *AMD* und *CDM* haben den gleichen Flächeninhalt, da die Grundseiten *AM* und *MC* gleich lang sind und beide eine gemeinsame Höhe *DK* haben.



Die Summe der Flächeninhalte der Dreiecke *ABM* und *CDM* ist daher genauso groß wie die Summe der Flächeninhalte der Dreiecke *CDM* und *DAM*.

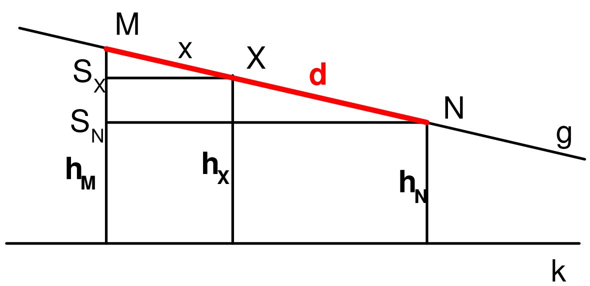
Analog ergibt sich, dass die Mitte *N* der Diagonalen *BD* die geforderte Eigenschaft hat.

Schritt 2: Die Punkte der Geraden *g* durch die Diagonalenmittelpunkte *M* und *N*, die innerhalb des Vierecks liegen, haben die geforderte Eigenschaft.

Beweis von Schritt 2:

Vorbemerkung:

Seien *g* und *k* zwei Geraden, *M* und *N* seien zwei Punkte mit Abstand *d* auf der Geraden *g*, so dass der Schnittpunkt von *g* und *k* nicht zwischen *M* und *N* liegt. Die Länge der Lote von *M* und *N* auf *k* sei h_M bzw. h_N.



Sei *X* ein Punkt auf der Halbgeraden von *g* mit Endpunkt *M*, auf der auch *N* liegt. Der Schnittpunkt von *g* und *k* liege nicht zwischen den Punkten *X* und *N*. Der Abstand von *M* zu *X* sei *x*.

Dann gilt für die Länge des Lots von *X* auf *k*:

$$h_X = h_M - \frac{x}{d}\left(h_M - h_N\right).$$

Beweis der Vorbemerkung:

Wir nehmen zunächst an, dass *g* und *k* weder orthogonal noch parallel sind.
Da die Punkte *M*, *N* und *X* nach Voraussetzung alle auf der gleichen Seite bezüglich dem Schnittpunkt der Geraden *g* und *k* liegen, erhält man wie in der obigen Zeichnung die ähnlichen Dreiecke NMS_N und XMS_X. Daher ist

$$\frac{x}{\overline{MS_X}} = \frac{d}{\overline{MS_N}} \text{ bzw. } \frac{x}{h_M - h_X} = \frac{d}{h_M - h_N}.$$

Durch Umformung ergibt sich daraus die in der Vorbemerkung aufgestellte Beziehung.
Wenn *k* und *g* parallel sind, so ist $h_X = h_M = h_N$ und die behauptete Beziehung ist ebenfalls erfüllt.
Wenn *k* und *g* orthogonal sind, so ist $x = h_M - h_X$ und $d = h_M - h_N$. Somit ist die aufgestellte Beziehung auch in diesem Fall erfüllt.
Damit ist die Vorbemerkung bewiesen.

Nun zum eigentlichen Beweis von Schritt 2:

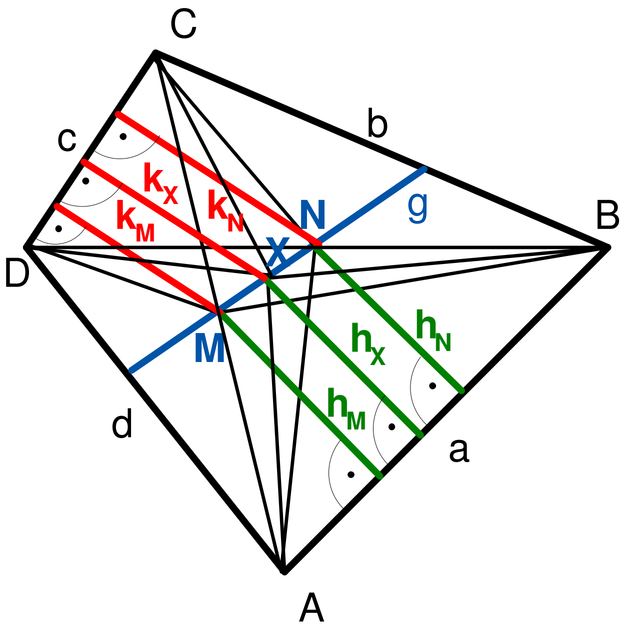
Da es sich beim vorgegebenen Viereck nicht um ein Parallelogramm handelt, fallen die Diagonalenmittelpunkte *M* und *N* nicht zusammen. Somit ist die Gerade *g* durch *M* und *N* eindeutig erklärt.

Die Gerade *g* schneidet die Vierecksseiten in zwei gegenüberliegenden Seiten: wenn *g* z.B. durch die benachbarten Seiten *AB* und *BC* verlaufen würde, aber nicht durch die Eckpunkte *A* und *C*, so hätte *g* mit der Diagonalen *AC* keine Schnittpunkte. Dies ist unmöglich, da *M* auf *g* und *AC* liegt. Somit verläuft *g* entweder durch gegenüberliegende Eckpunkte oder schneidet gegenüberliegende Seiten im Inneren.

Im folgenden nehmen wir also ohne Beschränkung der Allgemeinheit an, dass *g* durch die gegenüberliegenden Seiten $b = BC$ und $d = AD$ des Vierecks verläuft, also mit $a = AB$ und $c = CD$ höchstens Eckpunkte gemeinsam hat (vergleiche untenstehende Abbildung).

Sei *X* ein Punkt auf *g*, so dass zwischen *M*, *N* und *X* kein Schnittpunkt von *g* mit einer der Geraden (AB) oder (CD) liegt. Dabei kann *X* auch außerhalb des Vierecks liegen, solange nur diese Eigenschaft erfüllt ist.

Zunächst nehmen wir an *X* liegt auf der Halbgeraden mit Endpunkt *M* durch *N*.
Sei außerdem
h_M das Lot von *M* auf (AB),
h_N das Lot von *N* auf (AB),
h_X das Lot von *X* auf (AB),
k_M das Lot von *M* auf (CD),
k_N das Lot von *N* auf (CD),
k_X das Lot von *X* auf (CD).



Ferner sei F der Flächeninhalt des Vierecks $ABCD$. Nach Schritt 1 ist

$$\frac{1}{2}ah_M+\frac{1}{2}ck_M=\frac{1}{2}F \text{ und } \frac{1}{2}ah_N+\frac{1}{2}ck_N=\frac{1}{2}F.$$

Durch Subtraktion dieser beiden Gleichungen voneinander ergibt sich

(*) $$a(h_M-h_N)+c(k_M-k_N)=0.$$

Da alle Voraussetzungen der Vorbemerkung erfüllt sind, gilt

$$h_X=h_M-\frac{x}{d}(h_M-h_N) \text{ und } k_X=k_M-\frac{x}{d}(k_M-k_N).$$

Damit folgt

(**) $$\frac{1}{2}ah_X+\frac{1}{2}ck_X=\frac{1}{2}ah_M+\frac{1}{2}ck_M-\frac{1}{2}\frac{x}{d}\left(a(h_M-h_N)+c(k_M-k_N)\right)=\frac{1}{2}F.$$

In der letzten Beziehung in (**) wurde (*) benutzt. Somit haben die Dreiecke ABX und CDX zusammen gerade den halben Flächeninhalt des Vierecks.

Liegt nun X zusätzlich innerhalb des Vierecks, so liegen auch die Dreiecke ABX und CDX innerhalb des Vierecks. Zusammen sind sie gerade so groß, wie der Rest des Vierecks, also die Dreiecke DAX und BCX. Damit hat X die in der Aufgabenstellung geforderte Eigenschaft.

Liegt X auf der Halbgeraden mit Endpunkt N durch M, so kann man den Beweis analog führen, wenn man die Rolle von M und N vertauscht. Alle Punkte auf g, die innerhalb des Vierecks liegen, haben also die verlangte Eigenschaft.

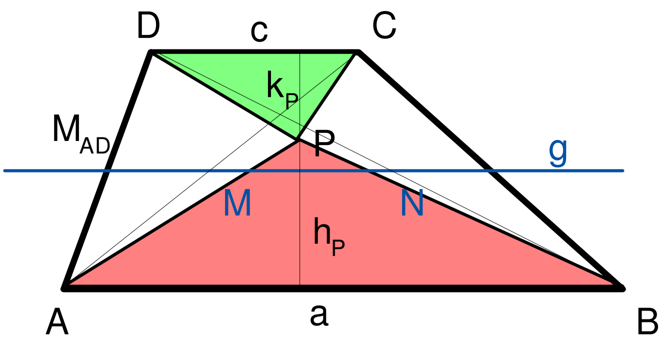
Schritt 3: Die Punkte, die nicht auf der Geraden *g* durch die Diagonalenmittelpunkte *M* und *N* liegen, haben nicht die geforderte Eigenschaft.

Beweis von Schritt 3:

Fall 1: g ist parallel zur Seite AB.

Beweis von Fall 1:

Dann ist g Mittelparallele im Dreieck ABD. Somit schneidet g die Seite AD in ihrem Mittelpunkt M_{AD}. Somit ist g auch Mittelparallele in CDA. Also ist g auch parallel zu CD. Es liegt demnach ein Trapez mit parallelen Seiten AB und CD vor. Die Gerade g ist Mittelparallele des Trapezes. Sei h der Abstand von AB und CD.



Sei P nun ein Punkt im Trapez. Der Abstand von P zu AB sei h_P. Dann ist $k_P=h-h_P$ der Abstand von P zu CD. Für die Summe der Flächeninhalte der Dreiecke ABP und CDP ergibt sich

$$\frac{1}{2}ah_P+\frac{1}{2}ck_P=\frac{1}{2}ah_P+\frac{1}{2}c(h-h_P)=\frac{1}{2}h_P(a-c)+\frac{1}{2}ch$$

Der Punkt P hat die in der Aufgabe geforderte Eigenschaft, wenn dies der halbe Flächeninhalt des Trapezes ist, also

$$\frac{1}{2}h_P(a-c)+\frac{1}{2}ch=\frac{1}{2}F=\frac{1}{4}(a+c)h=\frac{1}{4}ah+\frac{1}{4}ch.$$

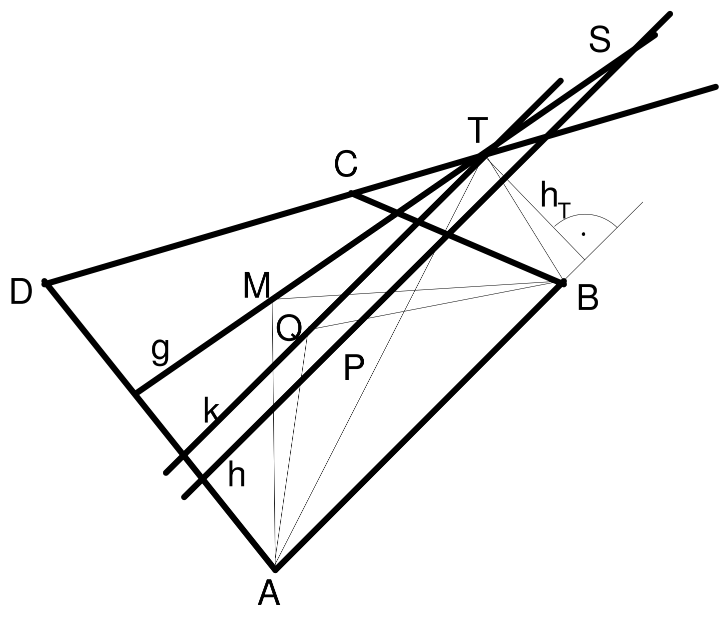
Daraus folgt $\frac{1}{2}h_P(a-c)=\frac{1}{4}h(a-c)$. Da nach Voraussetzung kein Parallelogramm vorliegt, ist $a\neq c$, somit können wir diese Gleichung durch $a-c$ dividieren und erhalten $h_P=\frac{1}{2}h$. Somit muss der Punkt *P* auf der Mittelparallele *g* liegen, wenn *P* die geforderte Eigenschaft hat. Damit ist Fall 1 bewiesen.

Fall 2: *g* ist nicht parallel zur Seite *AB.*

Beweis von Fall 2:
Sei *P* ein Punkt im Viereck, der nicht auf *g* liegt. Wir müssen zeigen, dass *P* nicht die in der Aufgabe geforderte Eigenschaft hat.
Wir nehmen an *P* würde zwischen *g* und *AB* liegen (wenn *P* zwischen *g* und *CD* liegt, so wird der Beweis analog geführt).
Sei *h* eine Parallele zur Seite *AB* durch den Punkt *P*. Da *AB* nicht parallel zu *g* ist, gibt es einen Schnittpunkt *S* zwischen *g* und *h*.

Behauptung:
Zwischen *M*, *N* und *S* liegt kein Schnittpunkt von *g* mit einer der Geraden (AB) oder (CD).

Beweis dieser Behauptung:
Da *P* zwischen *g* und *AB* liegt, liegt der Schnittpunkt *S* von *g* mit *h* auch zwischen *M* und dem Schnittpunkt von *g* mit (AB). Analog für *N*.
Insbesondere liegt der Schnittpunkt von *g* mit (AB) nicht zwischen *M*, *N* und *S*.



Würde (wie in der obigen Zeichnung) der Schnittpunkt *T* von *g* und (CD) zwischen *M* und *S* liegen, so zeichnen wir eine Parallele *k* durch *T* zu (AB). Auf *k* gibt es einen Punkt *Q*, so dass das Dreieck *ABQ* ganz im Dreieck *ABM* liegt. Da wir den Beweis von Schritt 2 auf *T* anwenden können (zwischen *M*, *N* und *T* liegt kein Schnittpunkt von *g* mit einer der Geraden (AB) oder (CD)), gilt nach (**):

$\frac{1}{2}ah_T+\frac{1}{2}ck_T=\frac{1}{2}ah_T=\frac{1}{2}F$. Hierbei ist h_T das Lot von *T* auf (AB), $k_T=0$ das Lot von *T* auf (CD). Es ist aber $\frac{1}{2}ah_T=F(ABT)$ der Flächeninhalt des Dreiecks *ABT*. Da *k* parallel zu (AB) ist, folgt $\frac{1}{2}F = \frac{1}{2}ah_T = F(ABT) = F(ABQ) < F(ABM) < \frac{1}{2}F$ (Schritt 1). Das ist ein Widerspruch, daher ist die Behauptung bewiesen.

Nach dieser Behauptung können wir den Beweis von Schritt 2 auch auf S anwenden. Es gilt also nach (**):

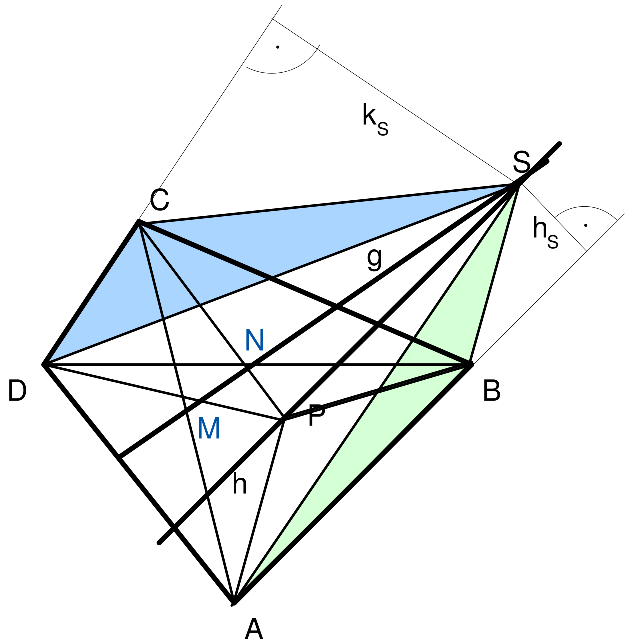
$\frac{1}{2}ah_S + \frac{1}{2}ck_S =$

$F(ABS) + F(CDS) = \frac{1}{2}F.$

Hierbei ist h_S das Lot von S auf (AB), k_S das Lot von S auf (CD).

Da h parallel zu (AB) ist, ist $F(ABS) = F(ABP)$.

Da h nicht parallel zu (CD) ist (sonst läge ein Trapez und damit Fall 1 vor), ist $F(CDS) \neq F(CDP)$.



Zusammen ergibt sich $F(ABP) + F(CDP) \neq F(ABS) + F(CDS) = \frac{1}{2}F$. Somit hat P nicht die in der Aufgabe geforderte Eigenschaft und Fall 2 ist bewiesen.
Somit ist Schritt 3 und damit die Aufgabe vollständig bewiesen.

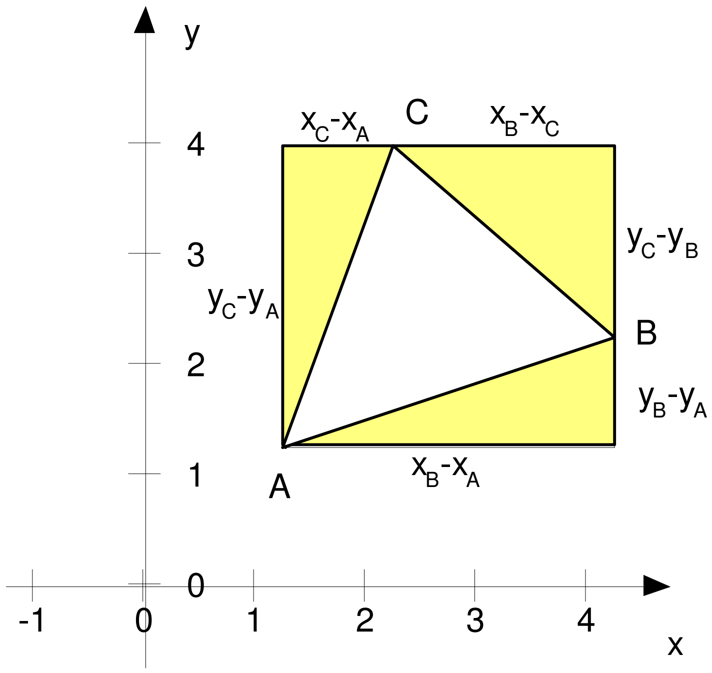
2. Lösungsvorschlag:

Vorbemerkung:

In einem Koordinatensystem ist das Dreieck $A(x_A|y_A)$, $B(x_B|y_B)$ und $C(x_C|y_C)$ gegeben. Dann hat das Dreieck ABC den Flächeninhalt

$$F(ABC) = \frac{1}{2}\left[(x_B - x_A)\cdot(y_C - y_A) - (x_C - x_A)\cdot(y_B - y_A)\right].$$

Beweis der Vorbemerkung:



Für die in der Abbildung dargestellte spezielle Lage von A, B und C ergibt sich indem man die gelben Dreiecke vom Rechteck abzieht: $F(ABC) =$

$$(x_B - x_A)(y_C - y_A) - \frac{1}{2}(x_B - x_A)(y_B - y_A) - \frac{1}{2}(x_B - x_C)(y_C - y_B) - \frac{1}{2}(x_C - x_A)(y_C - y_A).$$

Durch Ausmultiplizieren und Zusammenfassen ergibt sich die Behauptung. Auch für andere Lagen von A, B und C erhält man in analoger Weise die obige Formel. Somit ist die Vorbemerkung bewiesen.

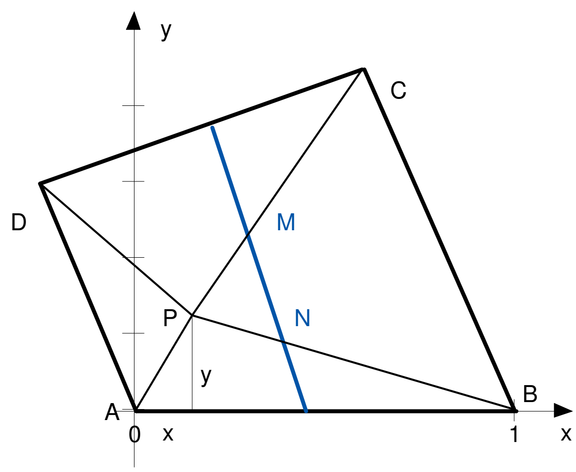
Zum eigentlichen Beweis:

Es wird ein Koordinatensystem so gewählt, dass die Eckpunkte A und B des Vierecks $ABCD$ die Koordinaten $A(0|0)$ und $B(1|0)$ haben. Die anderen Eckpunkte haben die Koordinaten $C(x_C|y_C)$ und $D(x_D|y_D)$.

Dann ergibt sich aus der Vorbemerkung

$F(ABCD) = F(ABC) + F(ACD)$

$$= \frac{1}{2}(y_C + x_C y_D - x_D y_C) \qquad \text{(I)}$$



Sein nun $P(x|y)$ ein Punkt im Viereck *ABCD.*

Für den Flächeninhalt des Dreiecks *ABP* gilt $F(ABP) = \frac{1}{2}y$. (II)

Für den Flächeninhalt des Dreiecks *PCD* ergibt sich nach Vorbemerkung:

$$F(PCD) = \frac{1}{2}\left[(x_C - x)\cdot(y_D - y) - (x_D - x)\cdot(y_C - y)\right]$$
$$= \frac{1}{2}(x_C y_D - x_C y - x y_D - x_D y_C + x_D y + x y_C) \qquad \text{(III)}$$

Der Punkt *P* hat die in der Aufgabenstellung geforderte Eigenschaft, wenn der Flächeninhalt des Vierecks *ABCD* doppelt so groß ist wie die Summe der Flächeninhalte der Dreiecke *ABP* und *PCD* . Nach (I), (II), (III) ergibt sich

$$2\left[\frac{1}{2}y + \frac{1}{2}(x_C y_D - x_C y - x y_D - x_D y_C + x_D y + x y_C)\right] = \frac{1}{2}(y_C + x_C y_D - x_D y_C)$$

oder

$$2y + 2x_C y_D - 2x_C y - 2x y_D - 2x_D y_C + 2x_D y + 2x y_C = y_C + x_C y_D - x_D y_C .$$

Umformen und Ausklammern liefert

(*) $$2(1 - x_C + x_D)y + 2(y_C - y_D)x = y_C - x_C y_D + x_D y_C .$$

Fall 1: $x_C = x_D + 1$

In diesem Fall ist $y_C \neq y_D$, da sonst *AB* und *CD* zwei gleich lange, parallele, gegenüberliegende Seiten des Vierecks wären. Es läge also ein Parallelogramm vor. Dies ist nach Aufgabenstellung ausgeschlossen. Somit stellt (*) die Gleichung einer Geraden *g* parallel zur *y*-Achse dar, denn

$$g:\ x = \frac{y_C - x_C y_D + x_D y_C}{2(y_C - y_D)}$$

Fall 2: $x_C \neq x_D + 1$

In diesem Fall stellt (*) die Gleichung der Geraden *g* mit

$$g:\ y = \frac{y_D - y_C}{1 - x_C + x_D}x + \frac{y_C - x_C y_D + x_D y_C}{2 - 2x_C + 2x_D}$$

In jedem Fall liegen die gesuchten Punkte also auf einer Geraden *g*.
Nun wird noch gezeigt, dass auch die Diagonalenmittelpunkte *M* und *N* auf dieser Geraden liegen.

Der Mittelpunkt *M* von *AC* hat die Koordinaten $M\left(\frac{x_C}{2}\middle|\frac{y_C}{2}\right)$, der Mittelpunkt *N* von *BD* hat die Koordinaten $N\left(\frac{1+x_D}{2}\middle|\frac{y_D}{2}\right)$.

Durch Einsetzen erkennt man, dass für *M* und *N* die allgemeine Gleichung (*) erfüllt ist, *M* und *N* liegen also auf *g*.
Da eine Gerade durch zwei Punkte eindeutig festgelegt ist, ist die in der Aufgabenstellung geforderte Eigenschaft genau für alle Punkte *P*, die im Viereck auf der Geraden *g* durch die Mittelpunkte *M* und *N* liegen, erfüllt. Damit ist die Aufgabe bewiesen.