2006

Runde 1

Aufgabe 1

Die Ziffern von 1 bis 5 sollen so in einer Reihe angeordnet werden, dass jedes Paar benachbarter Ziffern eine Zahl ergibt, die ein Produkt zweier einstelliger Zahlen ist.

Bestimme alle möglichen Anordnungen.

Zum Beispiel ist 43251 keine mögliche Anordnung. Es gilt zwar $32 = 4 \cdot 8$ und $25 = 5 \cdot 5$, aber 43 und 51 lassen sich nicht als Produkt von zwei einstelligen Zahlen schreiben.

Lösung:

Die möglichen Anordnungen sind 3 2 1 5 4, 3 2 1 4 5 und 3 5 4 2 1.

Die nebenstehende Tabelle gibt einen Überblick über die zweistelligen Zahlen, die sich aus den Ziffern 1, 2, 3, 4 und 5 bilden lassen. Die Zahlen, die sich nicht als Produkt von zwei einstelligen Zahlen schreiben lassen, sind durchgestrichen.

~~$11 = 1\cdot 11$~~	$12 = 2\cdot 6$	~~$13 = 1\cdot 13$~~	$14 = 2\cdot 7$	$15 = 3\cdot 5$
$21 = 3\cdot 7$	~~$22 = 2\cdot 11$~~	~~$23 = 1\cdot 23$~~	$24 = 4\cdot 6$	$25 = 5\cdot 5$
~~$31 = 1\cdot 31$~~	$32 = 4\cdot 8$	~~$33 = 3\cdot 11$~~	~~$34 = 2\cdot 17$~~	$35 = 5\cdot 7$
~~$41 = 1\cdot 41$~~	$42 = 6\cdot 7$	~~$43 = 1\cdot 43$~~	~~$44 = 4\cdot 11$~~	$45 = 5\cdot 9$
~~$51 = 3\cdot 17$~~	~~$52 = 4\cdot 13$~~	~~$53 = 1\cdot 53$~~	$54 = 6\cdot 9$	~~$55 = 5\cdot 11$~~

In der mittleren Spalte der Tabelle – das sind alle Zahlen mit Endziffer 3 – sind alle Zahlen durchgestrichen. Daran erkennt man, dass keine der möglichen Zahlen die Einerziffer 3 haben kann. Einzige Stelle in der Anordnung der fünf Ziffern, die nie Einerziffer ist, ist die erste Stelle. Folglich muss die Anordnung mit 3 beginnen.

In der mittleren Zeile – das sind alle Zahlen mit Anfangsziffer 3 – sind nur die Zahlen 32 und 35 nicht durchgestrichen. Damit ist eine Anordnung der fünf Ziffern höchstens dann möglich, wenn sie mit 32 oder mit 35 beginnt.

Zuerst untersuchen wir mögliche Anordnungen, die mit 35 beginnen: In der unteren Zeile – das sind alle Zahlen mit Anfangsziffer 5 – ist nur die 54 nicht durchgestrichen. Eine Anordnung, die mit 35 beginnt, kann also nur mit 4 weiter gehen, Zeile 4 ergibt dann, dass die nächste Ziffer 2 sein muss (die Ziffer 5 ist schon vergeben) – und die Zeile 2 ergibt, dass die 1, also die einzige noch nicht vergebene Ziffer, eine zulässige Ziffer nach der 2 ist. Damit ist 3 5 4 2 1 eine mögliche Anordnung und auch die einzige, die mit 35 beginnt.

Nun untersuchen wir Anordnungen, die mit 32 beginnen: Da noch 3 Stellen mit 3 Zahlen zu besetzen sind, gibt es $3 \cdot 2 \cdot 1 = 6$ solche Anordnungen. Die schreiben wir alle systematisch auf und untersuchen, ob die dabei entstehenden zweistelligen Zahlen in der Tabelle durchgestrichen sind:

3 2 1 4 5, 3 2 ~~4 1~~ 5, 3 2 ~~5 1~~ 4,
3 2 1 5 4, 3 2 4 ~~5 1~~, 3 2 5 ~~4 1.~~

Es gibt also außer der oben gefundenen Anordnung 3 5 4 2 1 nur noch 3 2 1 5 4 und 3 2 1 4 5.

Das war zu zeigen.

Aufgabe 2

Heinz addiert die Größen der Innenwinkel eines ebenen Vielecks und erhält den Wert 2006°. Er hat dabei einen Winkel übersehen.

Wie groß kann dieser Winkel sein?

Lösung:

Der übersehene Winkel ist entweder 154° oder 334° groß.

Der gesuchte Winkel sei α, die Anzahl der Ecken in dem Vieleck sei n.

Die Winkelsumme in einem ebenen Vieleck mit n Ecken beträgt $(n-2)\cdot 180°$.

Damit muss gelten:

$$(n-2)\cdot 180° = \alpha + 2006°$$

also $$\alpha = (n-2)\cdot 180° - 2006°.$$

Wir berechnen aus dieser Formel die möglichen Werte von α für n = 13, 14, 15 und 16 aus und schreiben sie in eine Tabelle:

n	13	13	14	15
α	–36	154°	334°	514°

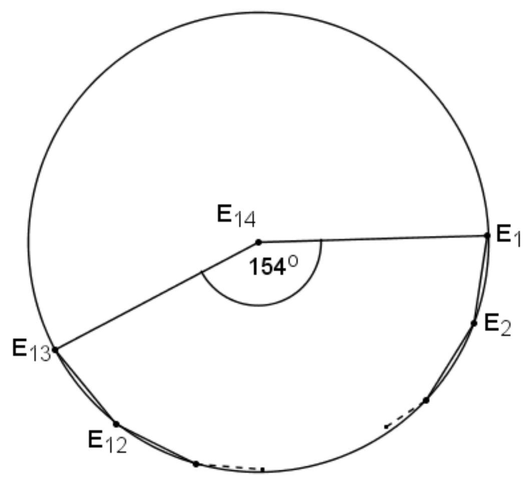
Wenn n größer wird, wird α auch größer, wenn n kleiner wird, wird α auch kleiner. Da zusätzlich für α gelten muss

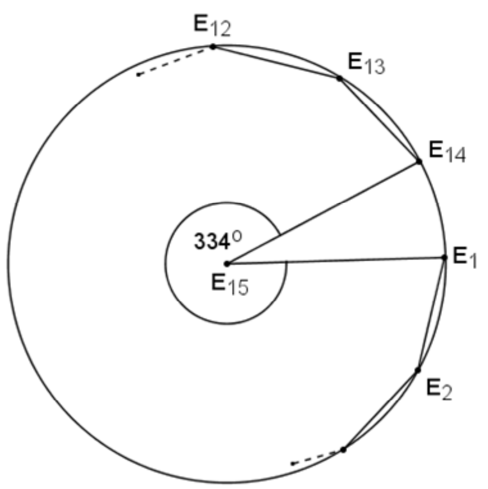
$$0° < \alpha < 180° \text{ oder } 180° < \alpha < 360°,$$

sind 154° und 334° die einzigen möglichen Werte.

Es gibt auch tatsächlich Vielecke mit dieser Winkelkonstellation:

Wir legen die Ecke E_n (n = 14 oder n = 15) auf den Mittelpunkt eines Kreises und zeichnen dort einen Winkel mit den oben berechneten Maßen. Diese schneiden die Kreislinie in zwei Punkten, die wir mit E_1 bzw. E_{n-1} benennen. Den so begrenzten Kreisbogen teilen wir in n – 2 gleiche Teile auf, die Teilpunkte sind dann die Ecken E_2, ..., E_{n-1}.





Aufgabe 3

Für welche natürlichen Zahlen n gibt es genau zwei verschiedene Primzahlen, die $n^3 - n$ teilen?

Lösung:

Nur für $n = 2$ und $n = 3$ gibt es genau zwei verschiedene Primzahlen, die $n^3 - n$ teilen.

Es ist $n^3 - n = n \cdot (n^2 - 1) = (n - 1) \cdot n \cdot (n + 1)$ für alle Zahlen n, also das Produkt von drei aufeinander folgenden ganzen Zahlen.
Unter drei aufeinander folgenden ganzen Zahlen, ist stets mindestens eine durch 2 und genau eine durch 3 teilbar, d.h. die beiden verschiedenen Primzahlen 2 und 3 sind stets Teiler von $n^3 - n$. Damit muss, wenn n die Bedingungen der Aufgabe erfüllen soll, die Primfaktorzerlegung von $n^3 - n$ stets die Faktoren 2 und 3 enthalten, aber keine weiteren.

1. Fall: $n = 0$ und $n = 1$:

Dann ist $n^3 - n = 0$ und alle Primzahlen (das sind mehr als 2!) sind Teiler von $n^3 - n$; d.h. $n = 0$ und $n = 1$ sind nicht bei den gesuchten Zahlen.

2. Fall: $n = 2$:

Dann ist $n^3 - n = 2^3 - 2 = 6 = 2 \cdot 3$; damit sind 2 und 3 die beiden einzigen Primzahlen, die Teiler von $n^3 - n$ sind. Also ist $n = 2$ eine der gesuchten Zahlen.

3. Fall: $n = 3$:

Dann ist $n^3 - n = 3^3 - 3 = 24 = 2^3 \cdot 3$; damit sind 2 und 3 die beiden einzigen Primzahlen, die Teiler von $n^3 - n$ sind. Also ist $n = 3$ eine der gesuchten Zahlen.

4. Fall: $n > 3$ und n ist ungerade:

Dann enthält die Primfaktorzerlegung von n nicht den Faktor 2, aber einen ungeraden. Wenn also n die Bedingungen der Aufgabe erfüllen soll, d.h. wenn die Primfaktorzerlegung von $(n - 1) \cdot n \cdot (n + 1)$ und damit auch die Primfaktorzerlegung von n keine anderen Faktoren als 2 und 3 enthalten darf, dann muss n eine Potenz von 3 sein.

Da n ungerade und durch 3 teilbar ist, sind die zu n benachbarten Zahlen $n - 1$ und $n + 1$ beide gerade und beide nicht durch 3 teilbar. Wenn die Primfaktorzerlegung von $(n - 1) \cdot n \cdot (n + 1)$ und damit auch die Primfaktorzerlegungen von $n - 1$ und $n + 1$ höchstens die Faktoren 2 und 3 enthalten sollen, dann dürfen die Primfaktorzerlegungen von $n - 1$ und $n + 1$ also nur den Faktor 2 enthalten; die beiden Zahlen müssen also Zweierpotenzen sein, die sich um 2 unterscheiden. Die einzigen Zweierpotenzen, die diese Bedingung erfüllen, sind 2 und 4, hieraus folgt aber sofort $n = 3$; dies steht aber im Widerspruch zur Fallbeschreibung. Es gibt also keine Lösung für n, die zu dieser Fallbeschreibung passt.

5. Fall: $n > 3$ und n ist gerade:

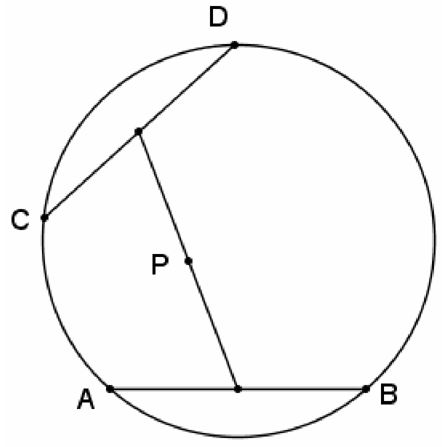
Dann sind $n - 1$ und $n + 1$ beide ungerade und beide größer als 2; die Primfaktorzerlegungen beider Zahlen enthalten also eine ungerade Primzahl und nicht die 2. Wenn n die Bedingungen der Aufgabe erfüllen soll, d.h. wenn die Primfaktorzerlegung von $(n - 1) \cdot n \cdot (n + 1)$ und damit auch die Primfaktorzerlegungen von $n - 1$ und $n + 1$ keine anderen Faktoren als 2 und 3 enthalten dürfen, dann dürfen beide Zahlen nur den Faktor 3 enthalten. Beide Zahlen sollen aber auch eine Differenz von 2 haben, was einen Widerspruch darstellt.

Es gibt also keine Lösung für n, die zu dieser Fallbeschreibung passt.

Da mit den fünf Fällen alle möglichen Zahlen n untersucht sind, ist der Beweis abgeschlossen.

Aufgabe 4

Gegeben ist ein Kreis mit zwei gleich langen Sehnen AB und CD. P ist der Mittelpunkt der Verbindungsstrecke der Sehnenmittelpunkte. Die Sehne CD gleitet am Kreis, die Sehne AB bleibt fest.
Welche Bahn beschreibt dabei P?



Vorbemerkung:

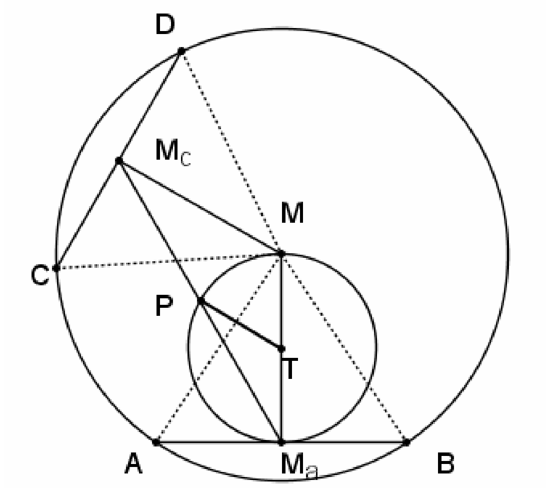
Wir bezeichnen den Mittelpunkt des gegebenen Kreises mit M, die Mittelpunkte vom AB und CD mit M_a und M_c, sowie den Mittelpunkt vom MM_a mit T.

Lösung:

Der Punkt P beschreibt den Thaleskreis über der Strecke MM_a.

1. Lösung:

Die Dreiecke ABM und CDM sind kongruent, denn sie stimmen in drei Seiten überein. Somit stimmen auch die Höhen überein und es gilt: $\overline{MM_a} = \overline{MM_c}$. Außer in den unten behandelten Grenzfällen bilden die Punkte M, M_a und M_c ein Dreieck. In diesem Dreieck ist TP Mittelparallele, denn T und P sind Mittelpunkte zweier Seiten. Somit gilt $\overline{TP} = \frac{1}{2}\overline{MM_c} = \frac{1}{2}\overline{MM_a}$.



P liegt also auf dem Thaleskreis über der Strecke MM_a.

Auch im Fall $M_a = M_c = P$ – dies ist genau dann der Fall, wenn die beiden Sehnen übereinstimmen – liegt P auf dem Thaleskreis.

In dem Fall, dass die Sehnen echt parallel sind, ist M der Mittelpunkt der Verbindungsstrecke der Sehnenmittelpunkte und somit ist P = M.

P liegt also ebenfalls auf dem Thaleskreis.

Jeder Punkt P des Thaleskreises ist auch tatsächlich Mittelpunkt einer Verbindungsstrecke:

Dies sieht man wie folgt: Sei $P \neq M$ (der Fall P = M ist im vorletzten Absatz behandelt) ein Punkt des Thaleskreises über M_aM. Dann ist PM ein Durchmesser des Kreises, die Sehne AB wird also bei Spiegelung auf eine gleichlange Sehne CD abgebildet.

P ist als Achsenpunkt gleich weit von M_a und dem Bildpunkt M_c entfernt. Da PM senkrecht zu M_aM_c ist, ist P auch Mittelpunkt dieser Verbindungsstrecke.

2. Lösung:

Wenn die Sehne DC am Kreis gleitet, dann verändert das Dreieck CDM seine Form nicht, insbesondere hat die Strecke MM_c immer die gleiche Länge; die Bahn des Punktes M_c ist also identisch mit der vollständigen Kreislinie des Kreises um M mit Radius $\overline{MM_c}$.

Da die Sehnen AB und CD gleichlang sind, kann M_C auch die Lage von M_a einnehmen und damit ist $\overline{MM_c} = \overline{MM_a}$.

In jeder Lage von M_c ist P das Bild von M_c bei der zentrischen Streckung $S(M_a; \frac{1}{2})$. Also ist die Bahn von P das Bild der Bahn von M_c bei dieser zentrischen Streckung.

Jede zentrische Streckung ist kreistreu; dabei wird der Mittelpunkt eines Kreises auf den Mittelpunkt des Bildkreises abgebildet.

Die zentrische Streckung $S(M_a; \frac{1}{2})$ bildet M auf den Mittelpunkt der Strecke MM_a ab.

Aus diesen fünf Argumenten folgt sofort: Die Bahn von P ist der vollständige Kreis um den Mittelpunkt der Strecke MM_A mit Radius $\frac{1}{2} \cdot \overline{MM_c} = \frac{1}{2} \cdot \overline{MM_c}$, also der Thaleskreis über der Strecke MM_a.

3. Lösung:

Sind am gleichen Kreis die Sehnen AB und CD gleich lang und die Winkel $\measuredangle AMB$ und $\measuredangle DMC$ gleich orientiert, so gibt es immer eine Symmetrieachse, bezüglich derer die beiden Sehnen symmetrisch liegen: Falls $A \neq C$, ist das Lot von M auf die Strecke AC diese Symmetrieachse, falls $A = C$, ist die Gerade AM diese Symmetrieachse.

Da eine Achsenspiegelung verhältnistreu ist, liegen auch die Mittelpunkte der beiden Strecken symmetrisch bzgl. dieser Achse. Damit steht ihre Verbindungsstrecke senkrecht auf dieser Achse und deren Mittelpunkt – also P – liegt auf dieser Achse.

Das heißt aber, dass – falls $P \neq M_A$ und $P \neq M$ – stets $\measuredangle M_APM = 90°$. Da zusätzlich die Punkte M_a und M fest sind, liegt P also auf dem Thaleskreis über der Strecke MM_a. Falls $P = M_a$ oder $P = M$, ist P identisch mit Punkten des Thaleskreises, liegt also ebenfalls auf ihm.

Ist umgekehrt P ein Punkt auf dem Thaleskreis, so betrachten wir im Fall $P \neq M$ die Spiegelung an PM, im Fall $P = M$ die Spiegelung am Lot auf MM_a in M. In beiden Fällen liegen M und P auf der Spiegelachse; die Spiegelung bildet also den Kreis auf sich selbst ab, den Punkt P ebenso. Damit wird auch die Sehne AB auf eine Sehne gleicher Länge am gleichen Kreis abgebildet, ebenso ihr Mittelpunkt M_a auf den Mittelpunkt der abgebildeten Sehne. Diese Sehne beschreibt eine mögliche Lage von CD mit ihrem Mittelpunkt M_c beim Gleiten am Kreis. Zu zeigen ist noch, dass P stets der Mittelpunkt von M_aM_c ist:

Falls $P = M_a$, ist AB mit CD identisch, insbesondere ist auch $P = M_a = M_c$, also P der Mittelpunkt von M_aM_c.

Falls $P \neq M_a$, steht PM_a senkrecht auf der betrachteten Symmetrieachse und P ist ein Punkt der Symmetrieachse. Nach Definition der Achsenspiegelung liegt dann M_c auf PM_a und P ist der Mittelpunkt von M_aM_c.

Aufgabe 5

Zocker-Detlef besucht ein Spielcasino. Er setzt bei jedem Spiel den gleichen Anteil des Geldes, das er im Moment hat. Gewinnt er, dann erhält er seinen Einsatz zurück und zusätzlich den gleichen Betrag nach einmal. Verliert er, so hat er seinen Einsatz verspielt.

Als Zocker-Detlef wieder aus dem Spielcasino kommt, hat er gleich viele Spiele gewonnen wie verloren. Über die Reihenfolge von Gewinn und Verlust ist nichts bekannt.

Hat er insgesamt Gewinn oder Verlust gemacht?

Lösung:

Zocker-Detlef hat Verlust gemacht.

Mit q bezeichnet man den (relativen) Anteil des Geldes, den Zocker-Detlef von dem Geld, das er im Moment hat, einsetzt. Da er etwas einsetzt, aber auch nicht mehr einsetzen kann, als er momentan hat, gilt: $0 < q \leq 1$.

Bezeichnet man den Geldbetrag, den er vor einem Spiel besitzt, mit x, so ist sein Einsatz beim nächsten Spiel $q \cdot x$.

Gewinnt er dieses Spiel, so besitzt er vor dem kommenden Spiel den Betrag $x + q \cdot x = x \cdot (1 + q)$.

Verliert er dieses Spiel, so besitzt er vor dem kommenden Spiel den Betrag $x - q \cdot x = x \cdot (1 - q)$.

Daraus folgt:

Gewinnen bedeutet Multiplikation des momentanen Geldbetrages mit dem Faktor $1 + q$.

Verlieren bedeutet Multiplikation des momentanen Geldbetrages mit dem Faktor $1 - q$.

Ist K das Anfangskapital von Zocker-Detlef vor dem ersten Spiel, so besitzt er nach n gewonnenen und n verlorenen Spielen das Endkapital $E = K \cdot p$, wobei p ein Produkt mit n Faktoren $1 + q$ und n Faktoren $1 - q$ ist.

Da nach dem Kommutativgesetz in einem Produkt die Reihenfolge der Faktoren beliebig geändert werden kann, ohne dass sich sein Wert ändert, gilt:

$$p = (1+q)^n \cdot (1-q)^n = \left((1+q)\cdot(1-q)\right)^n = \left(1-q^2\right)^n .$$

Da $0 < q \leq 1$ gilt, ist $p = \left(1-q^2\right)^n < 1$.

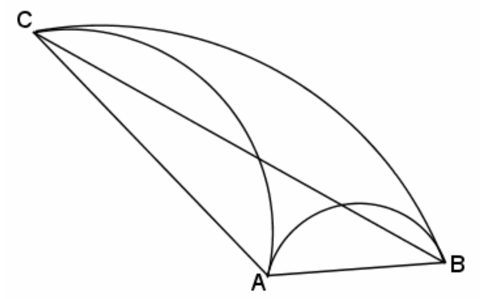
Folglich ist $E = K \cdot p < K$.

Aufgabe 6

Drei Kreisbögen bilden ein Dreibogeneck ABC, wenn sie auf Kreisen liegen, die sich in den Punkten A, B bzw. C berühren. Dabei sind nur Kreisbögen zugelassen, die in der Zeichenebene liegen und deren Mittelpunktswinkel kleiner als 180^o sind.

Gegeben sind nun die Eckpunkte A, B und C eines Dreiecks, das nicht rechtwinklig ist.

Konstruiere das zugehörige Dreibogeneck.



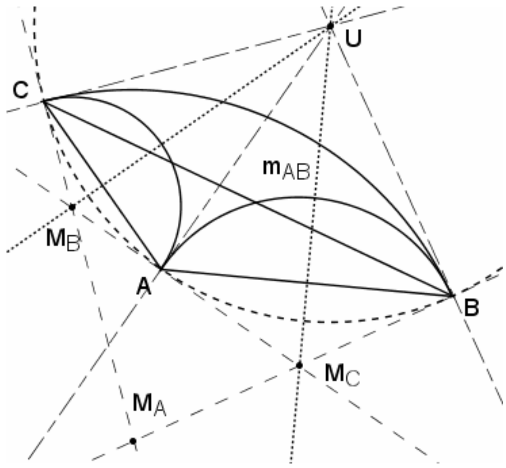
Vorbemerkung:

Wir bezeichnen mit U den Umkreismittelpunkt von Dreieck ABC, m_{AB}, m_{BC} und m_{CA} die Mittelsenkrechten der Strecken AB, BC bzw. CA, M_A, M_B und M_C die Mittelpunkte der gesuchten Kreisbögen durch B und C, A und C bzw. A und B.

Beschreibung der Konstruktion:

m_{AB} und m_{AC} schneiden sich in dem Umkreismittelpunkt U des Dreiecks ABC. Das Lot auf (UA) durch A und das Lot auf (UB) durch B schneiden sich in M_C.

Analog schneiden sich das Lot auf (UA) durch A und das Lot auf (UC) durch C in M_B; entsprechend das Lot auf (UB) durch B und das Lot auf (UC) durch C in M_A.



Die Konstruktion führt zu einem eindeutigen Ergebnis:

Der Umkreismittelpunkt U eines jeden Dreiecks ist eindeutig definiert; er fällt nie mit einer Ecke des Dreiecks zusammen. Damit sind auch die in der Konstruktion verwendeten Strecken, ebenso die Lote auf ihnen durch die Ecken des Dreiecks eindeutig definiert.

Da das Dreieck ABC nach Voraussetzung nicht rechtwinklig ist, liegt U auf keiner der Dreiecksseiten. Damit sind auch keine zwei der Geraden (UA), (UB) und (UC) parallel und somit auch keine zwei der verwendeten Lote. Deren Schnittpunkte M_A, M_B und M_C sind also immer existent und eindeutig definiert.

Die Konstruktion führt zu einem Ergebnis, das die Bedingungen der Aufgabe erfüllt:

U liegt auf m_{AB}, also liegen (UA) und (UB) und damit auch die beiden verwendeten Lote achsensymmetrisch bzgl. m_{AB}. Der Schnittpunkt M_C der beiden Lote liegt also ebenfalls auf m_{AB}. Damit gehen alle Kreisbögen mit Mittelpunkt M_C, die durch A gehen, auch durch B.

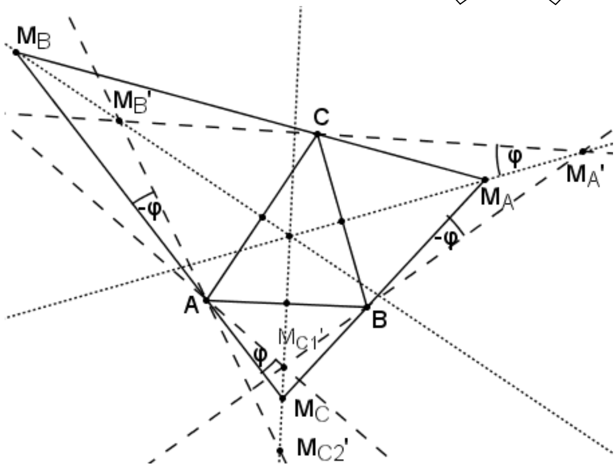
Entsprechend gehen alle Kreisbögen mit Mittelpunkt M_A (bzw. M_B), die durch B (bzw. C) gehen, auch durch C (bzw. A).

Nach Konstruktion ist $\measuredangle UBM_C = \measuredangle M_A BU = 90^o$; damit ist (UB) – wie verlangt – Tangente im Punkt B sowohl an den Kreis um M_C mit Radius $\overline{M_C B}$ als auch an den Kreis um M_A mit dem Radius $\overline{M_A B}$.

Entsprechend ist (UC) (bzw. (UA)) gemeinsame Tangente in C (bzw. A) an die Kreise um M_A und M_B (bzw. M_C und M_B).

Die Konstruktion führt zum einzig möglichen Ergebnis:

Wir nehmen an, es gäbe ein Tripel (M_A'; M_B'; M_C'), das die Bedingungen der Aufgabe erfüllt und bei dem o.B.d.A. $M_A \neq M_A'$. Dann gibt es eine Drehung um C, die die Gerade (CM_A) in die Gerade (CM_A') überführt; dabei ist der Drehwinkel φ (im Uhrzeigersinn gemessen) mit $0^o < \varphi < 180^o$ eindeutig bestimmt.



Da M_A der Mittelpunkt eines Kreises durch B und C ist, liegen die Geraden (M_AB) und (M_AC) achsensymmetrisch bzgl. m_{BC}. Entsprechend sind (M_BA) und (M_BC) achsensymmetrisch bzgl. m_{AC}, ebenso sind (M_CA) und (M_CB) achsensymmetrisch bzgl. m_{AB}. Entsprechendes gilt natürlich auch für die zweite angenommene Lösung.

Da sich die Kreise um M_A und M_B in C berühren, liegt C auf (M_AM_B), d.h. die Geraden (M_AC) und (M_AM_B) sind identisch; ebenso natürlich die Geraden $(M_A'C)$ und $(M_A'M_B')$.

Die Gerade (M_AM_B) wird also durch eine Drehung um C um den Winkel φ in die Gerade $(M_A'M_B')$ überführt. Aus der Symmetrie bzgl. m_{BC} folgt, dass (M_CM_A) durch eine Drehung um B um den Winkel $-\varphi$ in $(M_C'M_A')$ überführt wird. Mit dem gleichen Symmetrieargument (Symmetrie bzgl. m_{AB}) folgern wir, dass (M_CM_B) durch eine Drehung um A um den Winkel φ in $(M_C'M_B')$ überführt wird.

Andererseits führt auch eine Drehung um A um den Winkel $-\varphi$ diese beiden Geraden ineinander über; dies folgt aus der Symmetrie vom (M_CM_B) und (M_AM_B) bzgl. m_{AC}.

Der einzige Winkel φ mit $0^\circ < \varphi < 180^\circ$, für den diese beiden Drehungen zum gleichen Ergebnis führen, ist $\varphi = 90^\circ$.
Dies führt aber nur zur ‚entarteten' Lösung $M_A' = M_B' = M_C' = U$.

(Der Umkreis des Dreiecks enthält drei Kreisbögen über AB, BC und CA, die sich in A, B bzw. C tangential berühren.)

Bemerkungen:

Falls die Punkte A, B und C ein rechtwinkliges Dreieck bilden, entartet der Kreisbogen, der die Eckpunkte der Hypotenuse verbindet, zu einer geraden Strecke.

Falls die Punkte A, B und C kollinear sind, fallen M_A, M_B und M_C mit den Mittelpunkten der Strecken BC, CA bzw. AB zusammen.

Der Umkreismittelpunkt U des Dreiecks ABC ist gleichzeitig Inkreismittelpunkt des Dreiecks $M_AM_BM_C$.