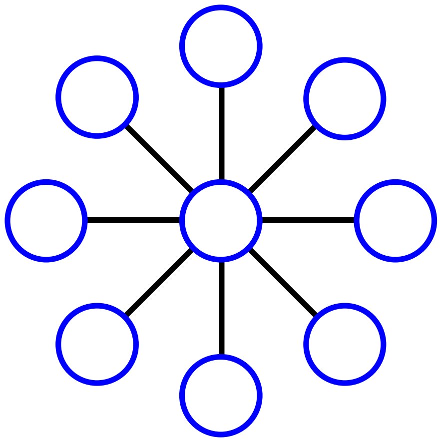
Landeswettbewerb Mathematik
Baden-Württemberg
Musterlösungen 1. Runde 2017/2018

Aufgabe 1

Kathi verteilt die Zahlen 1, 2, 3, … 9 auf die neun Kreise der Figur. Dabei hat die Summe von drei Zahlen auf einer geraden Linie stets den gleichen Wert.

Ermittle alle Zahlen, die in der Mitte stehen können.

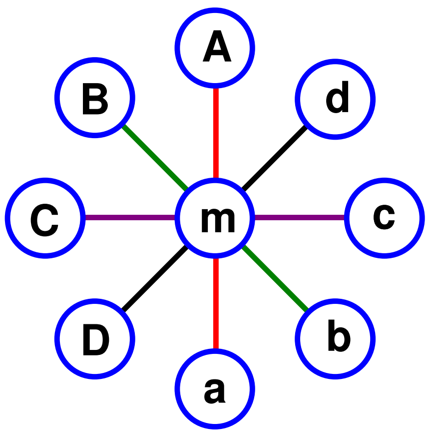


Lösung:

In der Mitte können nur die Zahlen 1, 5 oder 9 stehen.

1. Beweisvorschlag:

Die Zahl, die in der Mitte steht, bezeichnen wir mit m. Die Zahlen, die in den acht Kreisen außen stehen, bezeichnen wir wie in der Abbildung mit A, B, C, D, a, b, c, d.



Laut Aufgabenstellung gilt

$$A + m + a = B + m + b.$$

Subtrahiert man auf beiden Seiten m, so folgt

$$A + a = B + b.$$

Ebenso gilt $B + b = C + c$ und $C + c = D + d$.

Die vier Zahlen $A + a$, $B + b$, $C + c$, $D + d$ sind also gleich.

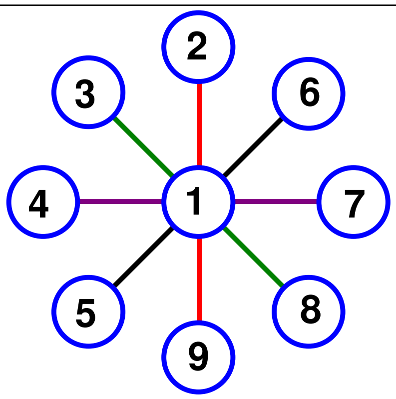
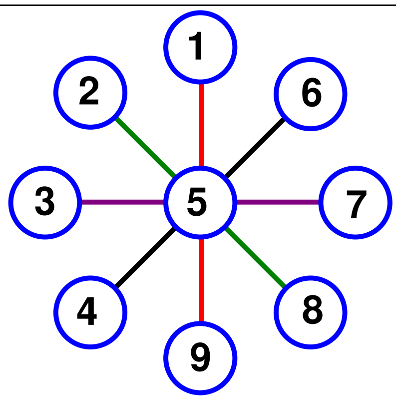
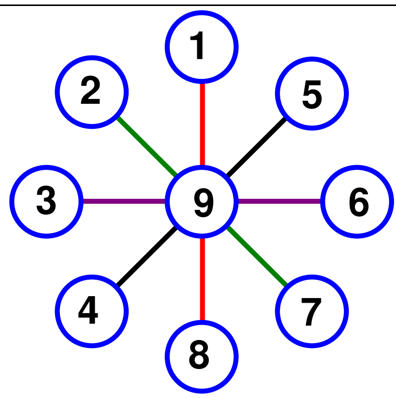
Die Summe aller Zahlen, die Kathi verwendet, beträgt $1 + 2 + 3 + \cdots + 9 = 45$. Es ist also $A + B + C + D + a + b + c + d + m = 45$.
Vertauscht man in der Summe die Reihenfolge, so ergibt sich
$(A + a) + (B + b) + (C + c) + (D + d) + m = 45$.
Da hier alle vier Klammern gleich $A + a$ sind, folgt $4 \cdot (A + a) + m = 45$, oder
$4 \cdot (A + a) = 45 - m$.
Die Zahl $4 \cdot (A + a)$ ist durch 4 teilbar, also muss auch $45 - m$ durch 4 teilbar sein.

Für m kommen also nur die Zahlen 1, 5 oder 9 infrage, denn $45-1=44$, $45-5=40$, $45-9=36$ sind durch 4 teilbar, während $45-2=43$, $45-3=42$, $45-4=41$, $45-6=39$, $45-7=38$ und $45-8=37$ nicht durch 4 teilbar sind.

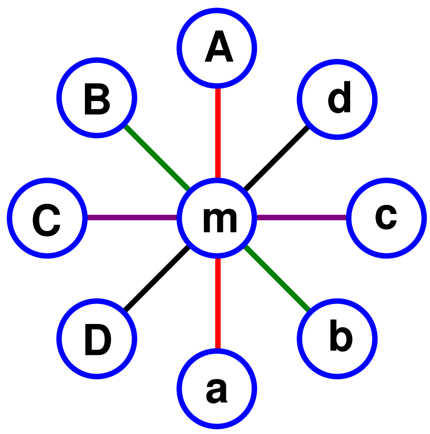
Nun muss noch gezeigt werden, dass die Zahlen 1, 5, und 9 auch wirklich in der Mitte stehen können. Dazu muss man jeweils eine Verteilung finden, die die Bedingungen der Aufgabenstellung erfüllt. Dies gelingt durch folgende Überlegung:

Für $m=1$ ist $45-1=44$, also muss $A+a=\frac{44}{4}=11$ ergeben. Die Summe gegenüberliegender Zahlen ist 11.
Für $m=5$ ist $45-5=40$, also muss $A+a=\frac{40}{4}=10$ ergeben. Die Summe gegenüberliegender Zahlen ist 10.
Für $m=9$ ist $45-9=36$, also muss $A+a=\frac{36}{4}=9$ ergeben. Die Summe gegenüberliegender Zahlen ist 9.

Damit ergeben sich die folgenden Verteilungen:

$m = 1$	$m = 5$	$m = 9$
		

2. Beweisvorschlag:



Wie im 1. Beweisvorschlag ergeben gegenüberliegende Paare $A+a$, $B+b$, $C+c$, $D+d$ die gleiche Summe. Sei A die (ohne m) größte der acht Zahlen, die nach Entfernen von m von 1,2,3,…,9 übrig bleiben. Dann ist a die kleinste dieser acht Zahlen. Wenn dies nicht der Fall wäre, so müsste die kleinste Zahl $k<a$ mit $K<A$ ein Paar gegenüberliegender Zahlen bilden. Dann $k+K<a+A$, das widerspricht der Gleichheit der Summe gegenüberliegender Zahlen.
Sei nun B die zweitgrößte der acht Zahlen, die nach Entfernen von m übrigblieben. Dann ist b die zweitkleinste Zahl. Sonst müsste die nach a kleinste Zahl z nämlich einer anderen Zahl $Z<B$ gegenüberstehen. Also $z+Z<b+B$ was der Gleichheit der Summen widerspricht.
Analog muss die drittgrößte Zahl der drittkleinsten und die viertgrößte Zahl der viertkleinsten Zahl gegenüberstehen.
Nun gehen wir der Reihe nach alle Zahlen von 1 bis 9 durch und prüfen, ob sie in der Mitte stehen können.

Mitte m	**Restzahlen von groß nach klein geordnet**	**Summen** **größte + kleinste Zahl** **zweitgrößte + zweitkleinste Zahl** **drittgrößte + drittkleinste Zahl** **viertgrößte + viertkleinste Zahl**	**Antwort**
1	9,8,7,6,5,4,3,2	$9+2=11$ $8+3=11$ $7+4=11$ $6+5=11$	Alle Summen gleich 1 ist möglich
2	9,8,7,6,5,4,3,1	$9+1=10$ $8+3=11$ $7+4=11$ $6+5=11$	Nicht alle Summen gleich 2 ist nicht möglich
3	9,8,7,6,5,4,2,1	$9+1=10$ $8+2=10$ $7+4=11$ $6+5=11$	Nicht alle Summen gleich 3 ist nicht möglich
4	9,8,7,6,5,3,2,1	$9+1=10$ $8+2=10$ $7+3=10$ $6+5=11$	Nicht alle Summen gleich 4 ist nicht möglich
5	9,8,7,6,4,3,2,1	$9+1=10$ $8+2=10$ $7+3=10$ $6+4=10$	Alle Summen gleich 5 ist möglich
6	9,8,7,5,4,3,2,1	$9+1=10$ $8+2=10$ $7+3=10$ $5+4=9$	Nicht alle Summen gleich 6 ist nicht möglich
7	9,8,6,5,4,3,2,1	$9+1=10$ $8+2=10$ $6+3=9$ $5+4=9$	Nicht alle Summen gleich 7 ist nicht möglich
8	9,7,6,5,4,3,2,1	$9+1=10$ $7+2=9$ $6+3=9$ $5+4=9$	Nicht alle Summen gleich 8 ist nicht möglich
9	8,7,6,5,4,3,2,1	$8+1=9$ $7+2=9$ $6+3=9$ $5+4=9$	Alle Summen gleich 9 ist möglich

Somit sind genau die Zahlen 1,5,9 als Mittelzahlen möglich.

3. Beweisvorschlag:

Man unterscheidet drei Fälle:

Fall 1: Die Zahl 1 steht in der Mitte.
In diesem Fall sind die Paare (2,9), (3,8), (4,7), (5,6) summengleiche Außenpaare, dieser Fall ist also möglich.

Fall 2: Die Zahl 9 steht in der Mitte.
In diesem Fall sind (1,8), (2,7), (3,6), (4,5) sind summengleiche Außenpaare, dieser Fall ist also möglich.

Fall 3: Weder die 1 noch die 9 stehen in der Mitte.
Dann stehen beide Zahlen außen. In diesem Fall muss eins der Außenpaare (1;9) sein:
Sonst hätte die 1 einen Partner kleiner 9, der Summenwert dieses Paars wäre also kleiner als 10. Die 9 hätte andererseits einen Partner größer als 1, die Summe des zugehörigen Paars wäre größer als 10.
Somit sind nicht alle Summen gleich, also muss ein Außenpaar (1;9) sein.

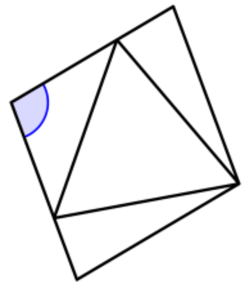
Wenn (1;9) ein Außenpaar ist, dann müssen alle Summen der Außenpaare 10 sein. Die 5 muss daher in diesem Fall in der Mitte stehen, da der Partner zur 5 mit Summe 10 wieder 5 wäre – die 5 kann aber nur einmal vorkommen.
Die weiteren Außenpaare neben (1;9) sind (2,8), (3,7), (4,6). Somit ist dieser Fall auch möglich.

Da die drei Fälle alle Möglichkeiten abdecken, ist die Aufgabe bewiesen.

Aufgabe 2

Sieben gleich lange Strohhalme werden wie in der Abbildung gelegt.

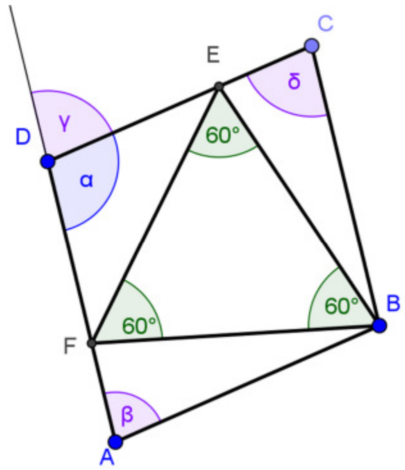
Bestimme die Größe des markierten Winkels.



Lösung:

Die Weite des markierten Winkels ist 100°.

Beweisvorschlag:



Die Eckpunkte der Figur seien wie in der Abbildung bezeichnet. Den gesuchten Winkel bezeichnen wir mit α. Da alle sieben Strecken gleich lang sind, ergeben sich die folgenden Eigenschaften:

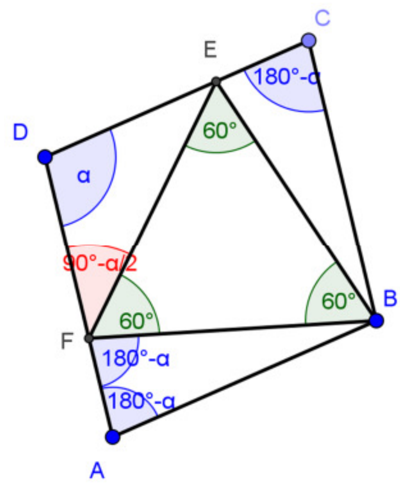
(1) Das Viereck $ABCD$ ist eine Raute, also insbesondere ein Parallelogramm. Der Winkel β ist Stufenwinkel zu γ. der Winkel δ ist Wechselwinkel zu γ. Der Winkel γ ist Nebenwinkel von α. Also gilt:

$$\beta = \gamma = \delta = 180° - \alpha.$$

(2) Das Dreieck BEF ist gleichseitig, alle Innenwinkel haben also die Weite 60°.

(3) Das Dreieck ABF ist gleichschenklig mit Basiswinkeln $\sphericalangle BAF$ und $\sphericalangle AFB$. Es gilt also nach (1):

$$\sphericalangle BAF = \sphericalangle AFB = 180° - \alpha.$$



(4) Die beiden Dreiecke ABF und EBC sind nach dem Kongruenzsatz Ssw kongruent, denn $\overline{AB} = \overline{BC}$, $\overline{BE} = \overline{BF}$ und (nach (1)) $\sphericalangle ECB = 180° - \alpha = \sphericalangle BAF$. Somit gilt auch $\overline{CE} = \overline{AF}$ und damit auch $\overline{DE} = \overline{DF}$, da die Seiten des Vierecks alle gleich lang sind. Das Dreieck FED ist also ebenfalls gleichschenklig. Die beiden Basiswinkel $\sphericalangle EFD$ und $\sphericalangle DEF$ haben somit beide die Weite $\frac{180°-\alpha}{2} = 90° - \frac{\alpha}{2}$.

Beim Punkt F treffen nun drei Winkel zusammen, nämlich die Winkel $\sphericalangle AFB$, $\sphericalangle BFE$ und $\sphericalangle EFD$. Alle drei Winkel zusammen bilden einen gestreckten Winkel, da F auf der Strecke $\overline{AD}$ liegt. Nach (2), (3) und (4) ist:

$$180° = \sphericalangle AFB + \sphericalangle BFE + \sphericalangle EFD = (180° - \alpha) + 60° + \left(90° - \frac{\alpha}{2}\right) = 330° - \frac{3}{2}\alpha.$$

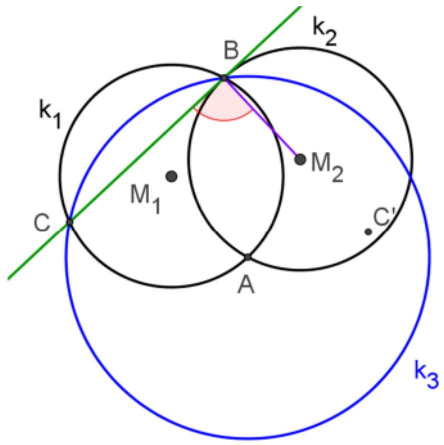
Löst man $180° = 330° - \frac{3}{2}\alpha$ nach α auf, so ergibt sich $\frac{3}{2}\alpha = 150°$ bzw. $\alpha = 100°$.

Aufgabe 3

Die Kreise $\boldsymbol{k_1}$ und $\boldsymbol{k_2}$ mit gleich langen Radien schneiden sich in zwei Punkten A und B. Ein dritter Kreis hat den Mittelpunkt A, geht durch B und schneidet den Kreis $\boldsymbol{k_1}$ in einem weiteren Punkt C.
Zeige, dass die Gerade BC eine Tangente an $\boldsymbol{k_2}$ ist.

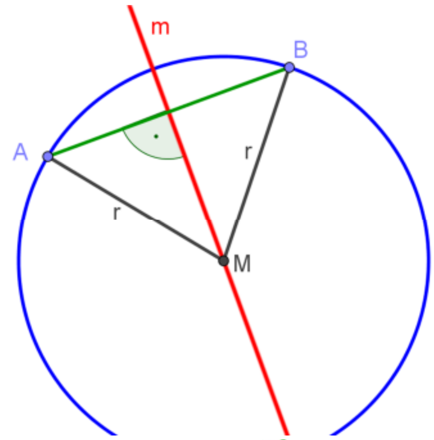
Beweisvorschlag:

Die Abbildung zeigt die zur Aufgabenstellung gehörende Figur.



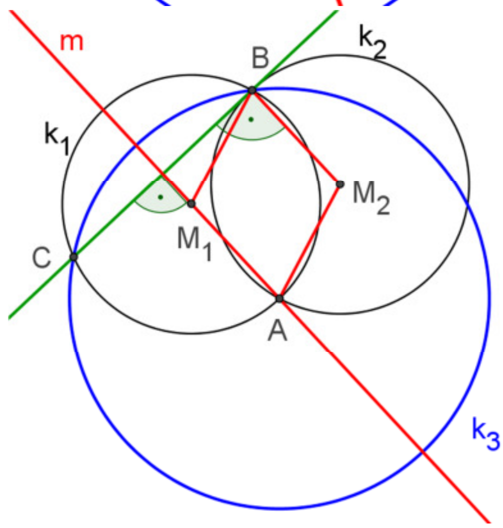
Die Punkte M_1 und M_2 bezeichnen die Mittelpunkte der Kreise k_1 bzw. k_2.

Die Tangente an k_2 im Punkt B ist die eindeutig bestimmte Gerade durch B, die orthogonal zum Radius $\overline{M_2B}$ ist.
Es ist also zu beweisen, dass BC und $\overline{M_2B}$ orthogonal sind.



Beim Beweis wird folgende Aussage benutzt:
Die Mittelsenkrechte m einer Sehne $\overline{AB}$ eines Kreises mit Radius r verläuft durch den Mittelpunkt M des Kreises.
Die Mittelsenkrechte von $\overline{AB}$ besteht nämlich genau aus den Punkten, die von A und B den gleichen Abstand haben. Das ist für M der Fall, da

$$\overline{AM} = \overline{BM} = r.$$



Diese Aussage wird nun für die Mittelsenkrechte m der Strecke $\overline{BC}$ benutzt. Diese Strecke ist nach Aufgabenstellung eine Sehne in den Kreisen k_1 und k_3. Ihre Mittelsenkrechte verläuft also durch den Mittelpunkt M_1 von k_1 und den Mittelpunkt A von k_3. Es gilt also:

(1) Die Gerade M_1A ist orthogonal zu BC.

Außerdem ist das Viereck M_1AM_2B eine Raute, da alle vier Seiten des Vierecks Radien der Kreise k_1 und k_2 sind.

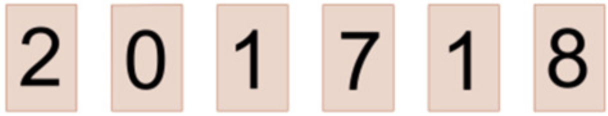
Da eine Raute ein Parallelogramm ist, folgt:

(2) Die Strecken $\overline{M_1A}$ und $\overline{M_2B}$ sind parallel.

Aus (1) und (2) folgt: Die Gerade BC ist orthogonal zu $\overline{M_2B}$.
Damit ist die Gerade BC Tangente an k_2 im Punkt B.

Aufgabe 4

Auf dem Tisch liegen die sechs abgebildeten Zahlenkarten.
Amelie und Marius vereinbaren das folgende Spiel:



Marius darf die Karten in eine von ihm bestimmte Reihenfolge umsortieren. Danach nimmt Amelie eine der beiden äußeren Karten. Von der verbleibenden Kartenreihe nimmt sich nun Marius eine der beiden äußeren Karten. So geht es abwechselnd weiter, bis keine Karte mehr auf dem Tisch liegt. Danach addieren beide die Zahlen auf ihren Karten. Wer die größere Summe hat, gewinnt.

Kann Amelie oder kann Marius den Sieg erzwingen?

Lösung:

Amelie kann den Sieg erzwingen, egal wie Marius die Zahlenkarten anordnet.

1. Beweisvorschlag (Ohne Fallunterscheidung):

Nach dem Umsortieren durch Marius haben die Zahlen auf den Karten die Reihenfolge $z_1\ z_2\ z_3\ z_4\ z_5\ z_6$.

Für ihre Strategie vergleicht Amelie zu Beginn die Summen $s_1 = z_1 + z_3 + z_5$ und $s_2 = z_2 + z_4 + z_6$. Die Summe aller Zahlen ist

$$s_1 + s_2 = z_1 + z_2 + z_3 + z_4 + z_5 + z_6 = 2 + 0 + 1 + 7 + 1 + 8 = 19.$$

Die Summe $s_1 + s_2$ ist also ungerade, somit können s_1 und s_2 nicht gleich groß sein. Eine der beiden Summen ist größer als die andere. Die drei Karten, die zur größeren Summe führen, markiert Amelie für dieses Spiel mit einem grünen Aufkleber (g), die drei anderen mit einem roten Aufkleber (r).

Zu Beginn liegt vor dem ersten Zug von Amelie eine der beiden Farbfolgen

$$grgrgr \text{ oder } rgrgrg$$

vor.

Immer wenn Amelie am Zug ist, liegt eine gerade Anzahl von Karten vor. Da grüne und rote Karten abwechselnd liegen, kann bei einer geraden Anzahl von Karten nicht links und rechts die gleiche Farbe liegen. An einem Ende muss also eine grüne Karte vorliegen. Amelie kann in jedem ihrer Züge eine grün markierte Karte nehmen und hat daher am Ende die drei grün markierten Karten. Die Summe der Zahlen auf den Karten von Amelie ist also die größere der beiden Summen s_1 und s_2. Amelie kann den Sieg erzwingen.

Bemerkung: Marius kann in keinem Zug eine grüne Karte nehmen, da er immer eine ungerade Zahl von Karten vorfindet. Die äußeren beiden Karten vor seinem Zug sind stets rot markiert. Er muss immer eine rote Karte nehmen.

2. Beweisvorschlag (Mit Fallunterscheidung):

Nach dem Umsortieren durch Marius haben die Zahlen auf den Karten die Reihenfolge $z_1\, z_2\, z_3\, z_4\, z_5\, z_6$. Die Karten mit den Zahlen z_1, z_3 und z_5 nennen wir kurz „ungerade Karten“, die Karten mit den Zahlen z_2, z_4 und z_6 „gerade Karten“. Wichtig für die Strategie von Amelie ist, dass gerade und ungerade Karten immer abwechselnd liegen. Dies ist nicht nur offensichtlich zu Beginn der Fall, sondern auch immer im Verlauf des Spiels, da nur äußere Karten weggenommen werden.

Für ihre Strategie vergleicht Amelie zu Beginn die beiden Summen $s_1 = z_1 + z_3 + z_5$ und $s_2 = z_2 + z_4 + z_6$. Es ist

$$s_1 + s_2 = z_1 + z_2 + z_3 + z_4 + z_5 + z_6 = 2 + 0 + 1 + 7 + 1 + 8 = 19.$$

Die Summe $s_1 + s_2$ ist also ungerade, somit können s_1 und s_2 nicht gleich groß sein.

Amelie unterscheidet daher zwei Fälle:

Fall 1: $s_1 > s_2$

Amelie kann so spielen, dass sie die drei ungeraden Karten z_1, z_3 und z_5 bekommt, während Marius die geraden Karten z_2, z_4 und z_6 nehmen muss. Wenn Amelie so spielt, dann gewinnt sie, da ihre Summe $s_1 = z_1 + z_3 + z_5$ in Fall 1 größer ist als die Summe $s_2 = z_2 + z_4 + z_6$ von Marius.

Die folgenden beiden Typen von Kartenreihen sind wichtig für den Verlauf des Spiels:

Typ (A): In der Kartenreihe ist eine der äußeren Karten eine ungerade Karte, die andere Außenkarte ist eine gerade Karte.
Z.B. sind $z_3\, z_4\, z_5\, z_6$ oder $z_2 z_3$ Kartenreihen vom Typ (A).

Typ (B): In der Kartenreihe sind beide äußeren Karten gerade Karten.
Z.B. sind $z_2 z_3\, z_4\, z_5\, z_6$ oder $z_2 z_3 z_4$ Kartenreihen vom Typ (B). Auch eine einzige gerade Karte wie z.B. z_4 gehört als Sonderfall zu den Kartenreihen vom Typ (B).

Zu Beginn, wenn Amelie am Zug ist, liegt offensichtlich die Kartenreihe $z_1\, z_2\, z_3\, z_4\, z_5\, z_6$ vom Typ (A) vor. Amelie nimmt die ungerade Karte mit Zahl z_1. Amelie spielt so, dass sie vor jedem ihrer Züge eine Kartenreihe vom Typ (A) vorfindet. Nach ihrer Strategie nimmt sie die ungerade äußere Karte, die bei Typ (A) vorhanden ist. Die Kartenreihe verwandelt sich dadurch in eine Kartenreihe vom Typ (B), denn neben einer ungeraden Karte liegt eine gerade Karte. Amelie nimmt somit nur ungerade Karten.

Nun ist Marius an der Reihe. Vor jedem seiner Züge findet er wie eben beschrieben eine Kartenreihe vom Typ (B) vor. Auf beiden Seiten der Reihe liegen gerade Karten, er kann nur eine gerade Karte nehmen. Findet er nur noch eine Karte vor, so ist dies eine gerade Karte und er muss diese nehmen. Das Spiel ist dann beendet. Gab es vor seinem Zug noch mehrere Karten, so nimmt er eine der beiden geraden Karten und verwandelt die Kartenreihe notwendigerweise wieder in eine Kartenreihe vom Typ (A), denn an dem Ende, an dem Marius seine gerade Karte genommen hat, liegt jetzt eine ungerade Karte, während die andere äußere Karte gerade bleibt.

Nun ist wieder Amelie am Zug und findet wie beschrieben unabhängig vom Zug von Marius eine Kartenreihe vom Typ (A) vor. Sie kann somit ihre Strategie wie oben beschrieben fortsetzen und in jedem Zug eine ungerade Karte nehmen. Folglich gewinnt sie in Fall 1.

Fall 2: $s_1 < s_2$

In der Strategie von Amelie wird im Vergleich zu Fall 1 die Rolle der ungeraden und der geraden Karten vertauscht. Nun sind für Amelie die geraden Karten die „guten“ Karten, die ungeraden Karten sind die „schlechten“ Karten.
Folglich wird Amelie so spielen, dass sie die drei geraden Karten z_2, z_4 und z_6 bekommt, während Marius die ungeraden Karten z_1, z_3 und z_5 nehmen muss. Amelies Summe $s_2 = z_2 + z_4 + z_6$ ist in Fall 2 größer ist als die Summe $s_1 = z_1 + z_3 + z_5$ von Marius.

Der beschriebene Typ (A) einer Kartenreihe ist gleich wie in Fall 1: Eine der äußeren Karten ist ungerade, die andere ist gerade.

Typ (B) wird ersetzt durch Typ (C): In der Kartenreihe sind beide äußeren Karten ungerade Karten.

Vor jedem Zug von Amelie liegt eine Reihe vom Typ (A) vor. Nach ihrer Strategie nimmt sie die eindeutige gerade äußere Karte. Marius findet daher eine Reihe vom Typ (C) vor und muss eine ungerade Karte nehmen. Er stellt wieder eine Reihe vom Typ (A) her, wenn er nicht bereits die letzte Karte nimmt und damit das Spiel beendet. Da Amelie nur gerade und Marius nur ungerade Karten nimmt, hat sie am Ende gewonnen.

3. Beweisvorschlag (Vollständige Darstellung des Spielverlaufs):

Nach dem Umsortieren durch Marius haben die Zahlen auf den Karten die Reihenfolge $z_1\, z_2\, z_3\, z_4\, z_5\, z_6$.

Für ihre Strategie vergleicht Amelie zu Beginn die beiden Summen $s_1 = z_1 + z_3 + z_5$ und $s_2 = z_2 + z_4 + z_6$. Es ist

$$s_1 + s_2 = z_1 + z_2 + z_3 + z_4 + z_5 + z_6 = 2 + 0 + 1 + 7 + 1 + 8 = 19.$$

Die Summe $s_1 + s_2$ ist also ungerade, somit können s_1 und s_2 nicht gleich groß sein.

Amelie unterscheidet daher zwei Fälle:

Fall 1: $s_1 > s_2$

Es wird gezeigt, dass Amelie das Spiel so steuern kann, dass sie am Ende die „guten“ Karten mit den Zahlen z_1, z_3 und z_5 mit der größeren Summe s_1 weggenommen hat. Für Marius bleiben nur die „schlechten“ Karten z_2, z_4 und z_6.

Amelie nimmt zuerst die Karte mit der Zahl z_1.
Übrig bleiben dann die fünf Karten $z_2\, z_3\, z_4\, z_5\, z_6$. Marius muss eine der beiden Karten mit den Zahlen z_2 oder z_6. wegnehmen.

Fall 1.1: Marius nimmt die Karte mit der Zahl z_2.
Dann bleiben die vier Karten $z_3\, z_4\, z_5\, z_6$ liegen.
Amelie kann die „gute“ Karte z_3 wegnehmen.

Fall 1.2: Marius nimmt die Karte mit der Zahl z_6.
Dann bleiben die vier Karten $z_2\, z_3\, z_4\, z_5$ liegen.
Amelie kann die „gute“ Karte z_5 wegnehmen.

Im Fall 1.1 bleiben für Marius die Karten mit den Zahlen in der Reihenfolge $z_4\, z_5\, z_6$ übrig. Er kann also wieder nur eine der „schlechten“ Karten mit den Zahlen z_2 oder z_6 wegnehmen. Amelie kann danach die „gute“ Karte mit der Zahl z_5 wegnehmen und hat insgesamt die Karten mit den Zahlen z_1, z_3 und z_5 mit der Summe s_1 weggenommen. Marius dagegen hat die Karten mit den Zahlen z_2, z_4 und z_6 mit der Summe s_2 bekommen.

Im Fall 1.2 bleiben für Marius die Karten mit den Zahlen in der Reihenfolge $z_2\ z_3\ z_4$ übrig. Er kann also wieder nur eine der „schlechten“ Karten mit den Zahlen z_2 oder z_4 wegnehmen. Amelie kann danach die „gute“ Karte mit der Zahl z_3 wegnehmen und hat auch hier insgesamt die Karten mit den Zahlen z_1, z_3 und z_5 mit der Summe s_1 weggenommen. Marius dagegen hat die Karten mit den Zahlen z_2, z_4 und z_6 mit der Summe s_2 bekommen.

Da $s_1 > s_2$ hat in beiden Fällen 1.1 und 1.2 Amelie das Spiel gewonnen.

Fall 2: $s_1 < s_2$

Es wird gezeigt, dass Amelie das Spiel so steuern kann, dass sie am Ende die „guten“ Karten mit den Zahlen z_2, z_4 und z_6 mit der Summe s_2 weggenommen hat.
Für Marius bleiben nur die „schlechten“ Karten z_1, z_3 und z_5.

Amelie nimmt zuerst die „gute“ Karte mit der Zahl z_6.
Übrig bleiben dann fünf Karten mit den Zahlen in der Reihenfolge $z_1\ z_2\ z_3\ z_4\ z_5$.
Marius muss dann eine der beiden „schlechten“ Karten mit den Zahlen z_1 oder z_5 wegnehmen.

Fall 2.1: Marius nimmt die Karte mit der Zahl z_1.
Dann bleiben die vier Karten mit den Zahlen in der Reihenfolge $z_2\ z_3\ z_4\ z_5$ liegen.
Amelie kann dann wieder eine „gute“ Karte mit der Zahl z_2 wegnehmen.

Fall 2.2: Marius nimmt die Karte mit der Zahl z_5.
Dann bleiben die vier Karten mit den Zahlen in der Reihenfolge $z_1\ z_2\ z_3\ z_4$ liegen.
Amelie kann dann wieder eine „gute“ Karte mit der Zahl z_4 wegnehmen.

Im Fall 2.1 bleiben für Marius die Karten mit den Zahlen in der Reihenfolge $z_3\ z_4\ z_5$ übrig. Er kann also wieder nur eine der „schlechten“ Karten mit den Zahlen z_3 oder z_5 wegnehmen. Amelie kann danach die „gute“ Karte mit der Zahl z_4 wegnehmen und hat insgesamt die Karten mit den Zahlen z_2, z_4 und z_6 mit der Summe s_2 weggenommen. Marius dagegen hat die Karten mit den Zahlen z_1, z_3 und z_5 mit der Summe s_1 bekommen.

Im Fall 2.2 bleiben für Marius die Karten mit den Zahlen in der Reihenfolge $z_1\ z_2\ z_3$ übrig. Er kann als wieder nur eine der „schlechten“ Karten mit den Zahlen z_1 oder z_3 wegnehmen. Amelie kann danach die Karte mit der Zahl z_2 wegnehmen und hat auch hier insgesamt die Karten mit den Zahlen z_2, z_4 und z_6 mit der Summe s_2 weggenommen. Marius dagegen hat die Karten mit den Zahlen z_1, z_3 und z_5 mit der Summe s_1 bekommen.

Da $s_1 < s_2$ hat Amelie auch in diesen beiden Fällen 2.1 und 2.2 das Spiel gewonnen.
Da alle möglichen Fälle erfasst sind, hat Amelie das Spiel in jedem Fall gewonnen und sie hat den Sieg erzwungen.

Aufgabe 5

Pauline wählt eine natürliche Zahl n und schreibt die Zahlen 1, 2, 3, ... , $2n$ der Größe nach an eine Tafel. Luisa möchte von diesen Zahlen n aufeinanderfolgende so streichen, dass die Summe der an der Tafel verbleibenden Zahlen 135 ist.
Bestimme alle Zahlen n, für die dies möglich ist.

Lösung:

Nur für die Zahlen $n = 10$ und $n = 15$ kann Luisa n aufeinanderfolgende Zahlen so streichen, dass die Restsumme 135 beträgt.

1. Beweisvorschlag (mit Gaußscher Summenformel):

Zuerst soll untersucht werden, wie groß n höchstens sein kann.
Hätte Pauline $n = 16$ gewählt, so hätte sie die Zahlen $1, 2, 3, \ldots, 32$ an die Tafel geschrieben. Die kleinstmöglichen Zahlen, die Luisa nach ihrer Streichung von 16 Zahlen übriglassen könnte, wären die Zahlen $1,2,3, \ldots, 16$. Die kleinstmögliche Summe ist also $1 + 2 + 3 + \cdots + 16 = 136$, also bereits größer als 135. Mit $n = 16$ ist es nicht möglich die Restsumme 135 zu erzielen. Erhöht Pauline ihre Zahl n, so wird die kleinstmögliche Summe $1 + 2 + 3 + \cdots + n$ mit wachsendem n immer größer. Da sie schon für $n = 16$ zu groß war, ist sie auch für alle $n > 16$ zu groß. Um die Restsumme 135 zu erzielen, muss also $n \leq 15$ gelten.

Nun soll untersucht werden, wie groß n mindestens sein muss, damit die Restsumme 135 möglich ist.
Hätte Pauline $n = 9$ gewählt, so hätte sie die Zahlen $1,2,3, \ldots, 18$ an die Tafel geschrieben. Die größtmöglichen Zahlen, die Luisa nach ihrer Streichung von 9 Zahlen übriglassen könnte, sind die Zahlen $10, \ldots, 18$. Die größtmögliche Summe ist also $10 + 11 + 12 + \cdots + 18 = 126$, also kleiner als 135. Mit $n = 9$ ist es nicht möglich die Restsumme 135 zu erzielen. Verkleinert Pauline ihre Zahl n, so wird die größtmögliche Restsumme $(n + 1) + (n + 2) + (n + 3) + \cdots + 2n$ mit kleiner werdendem n immer kleiner, denn sowohl die Anzahl der Summanden als auch die Größe der Summanden wird kleiner. Da sie schon für $n = 9$ zu klein war, ist sie auch für alle $n < 9$ zu klein. Um die Restsumme 135 zu erzielen, muss also $n \geq 10$ gelten.

Es ist also nur $10 \leq n \leq 15$ möglich.
Wir zeigen nun, dass die Zahlen $n = 11, 12, 13, 14$ nicht möglich sind.
Streicht Luisa die n aufeinanderfolgenden Zahlen $k + 1$, $k + 2, \ldots, k + n$ (für $0 \leq k \leq n$), so haben die gestrichenen Zahlen die Summe
$S_{gestrichen} = (k + 1) + (k + 2) + \cdots + (k + n) = n \cdot k + 1 + 2 + 3 + \cdots + n = nk + \frac{n(n+1)}{2}$.
Hier wurde die Gaußsche Summenformel $1 + 2 + 3 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2}$ benutzt.
Die Summe $S_{gestrichen}$ ist für ungerade Zahlen durch n teilbar, da dann sowohl $n \cdot k$ als auch $\frac{n(n+1)}{2} = n \cdot \frac{n+1}{2}$ durch n teilbar ist. Für gerade n ist $S_{gestrichen}$ durch $\frac{n}{2}$ teilbar, da sowohl $n \cdot k$ als auch $\frac{n(n+1)}{2} = \frac{n}{2} \cdot (n + 1)$ durch $\frac{n}{2}$ teilbar sind.
Die Summe $S_{gesamt} = 1 + 2 + 3 + \cdots + n + (n + 1) + \cdots + 2n = \frac{2n \cdot (2n+1)}{2} = n \cdot (2n + 1)$ aller an die Tafel geschriebenen Zahlen ist in jedem Fall durch n teilbar. Somit ist die Summe der verbleibenden Zahlen $S_{verbleibend} = S_{gesamt} - S_{gestrichen}$ für ungerades n durch n und für gerades n durch $\frac{n}{2}$ teilbar.

Für $n = 11$ ist also $S_{verbleibend}$ durch 11 teilbar. Somit ist $S_{verbleibend} = 135$ nicht möglich, da 135 nicht durch 11 teilbar ist.

Für $n = 12$ ist also $S_{verbleibend}$ durch $\frac{12}{2} = 6$ teilbar. Somit ist $S_{verbleibend} = 135$ nicht möglich, da 135 nicht durch 6 teilbar ist.

Für $n = 13$ ist also $S_{verbleibend}$ durch 13 teilbar. Somit ist $S_{verbleibend} = 135$ nicht möglich, da 135 nicht durch 13 teilbar ist.

Für $n = 14$ ist also $S_{verbleibend}$ durch $\frac{14}{2} = 7$ teilbar. Somit ist $S_{verbleibend} = 135$ nicht möglich, da 135 nicht durch 7 teilbar ist.

Es bleibt also nur $n = 10$ und $n = 15$ übrig.

Für $n = 10$ streicht Luisa die zehn aufeinanderfolgenden Zahlen $3,4, \dots 12$:

$$1,2,\cancel{3,4,5,6,7,8,9,10,11,12},13,14,15,16,17,18,19,20$$

Dann ist die Summe der verbleibenden Zahlen

$1 + 2 + 13 + 14 + 15 + 16 + 17 + 18 + 19 + 20 = 135$.

Für $n = 15$ streicht Luisa die fünfzehn aufeinanderfolgenden Zahlen $15,16, \dots 29$:

$$1,2,3,4,5,6,7,8,9,10,11,12,13,14,\cancel{15,16,17,18,19,20,21,22,23,24,25,26,27,28,29},30$$

Dann ist die Summe der verbleibenden Zahlen $1 + 2 + \cdots + 14 + 30 = 135$.

Somit kann die Restsumme nur für die Zahlen $n = 10$ und $n = 15$ genau 135 ergeben.

Variante (ohne Gaußsche Summenformel, aber Rechnen mit Resten):

Die Gaußsche Summenformel wurde benutzt, um zu zeigen, dass die Summe von n aufeinanderfolgenden Zahlen für ungerades n durch n und für gerades n durch $\frac{n}{2}$ teibar ist. Dies kann man auch ohne Summenformel zeigen:

Von n aufeinanderfolgenden Zahlen ist genau eine durch n teilbar, genau eine lässt bei Division durch n den Rest 1 usw. Jeder Rest $0,1,2, \dots, n-1$ kommt genau einmal unter n aufeinander folgenden Zahlen vor.

Ist n ungerade, so kann man die $n - 1$ Zahlen, die nicht durch n teilbar sind, zu $\frac{n-1}{2}$ Paaren gruppieren, so dass die Summe der beiden Zahlen jedes Paars durch n teilbar ist. Man gruppiert die Zahl mit Rest 1 mit der Zahl mit Rest $n - 1$, die Zahl mit Rest 2 mit der Zahl mit Rest $n - 2$ usw. Somit ist die Summe von n aufeinanderfolgenden Zahlen für n ungerade immer durch n teilbar.

Ist n gerade, so gibt es außer den beiden Zahlen die Rest 0 und Rest $\frac{n}{2}$ haben, auf die gleiche Weise $\frac{n-2}{2}$ Paare deren Summe durch n teilbar ist. Die Summe von n aufeinanderfolgenden Zahlen ist also durch $\frac{n}{2}$ teilbar.

2. Beweisvorschlag (Berechnung der Summe der übrigen Zahlen):

Wie im 1. Beweisvorschlag wird gezeigt, dass $10 \leq n \leq 15$ gelten muss. Ist $x + 1$ die erste gestrichene Zahl, so werden die Zahlen mit Summe $(x + 1) + \cdots . + (x + n) = nx + \frac{n(n+1)}{2}$ gestrichen. Die Summe der restlichen Zahlen ist

$1 + 2 + \cdots + 2n - nx - \frac{n(n+1)}{2} = \frac{2n(2n+1) - n(n+1) - 2nx}{2} = \frac{3n^2 + n - 2nx}{2}$

Da diese Summe 135 beträgt, folgt $3n^2 + n - 2nx = n \cdot (3n + 1 - 2x) = 270 = 2 \cdot 3^3 \cdot 5$.

Also muss n ein Teiler von 270 sein. Dies ist für $11,12,13,14$ nicht der Fall.

3. Beweisvorschlag:

Die Zahlen $n < 10$ und $n > 15$ werden entsprechend dem 1. Beweisvorschlag ausgeschlossen. Gleiches gilt für die Lösungen in den Fällen $n = 10$ und $n = 15$.

Es muss also nur noch gezeigt werden, dass es für die Zahlen $11, 12, 13, 14$ keine Möglichkeit gibt, aus den $2n$ Zahlen $1, 2, 3, \ldots, 2n$ derart n aufeinanderfolgende Zahlen zu streichen, dass die restlichen Zahlen die Summe 135 haben.
Für den Nachweis wird ausgenutzt, dass beim Verändern der Position der gestrichenen Zahlen um eine Position nach rechts die Summe der gestrichenen Zahlen um n wächst und die Summe der verbleibenden Zahlen um n kleiner wird. Entsprechendes gilt für eine Verschiebung der gestrichenen Zahlen jeweils um eine Position nach links.

Nachweis für $n = 11$

Werden die Zahlen $6, 7, 8, \ldots, 14, 15, 16$ gestrichen, so haben die verbleibenden Zahlen $1, 2, 3, 4, 5, 17, 18, 19, \ldots, 22$ die Summe 132. Bei jeder Positionsänderung um eine Stelle nach links oder rechts ändert sich der Wert 132 jeweils um 11. Die Zahl 135 ist nicht erreichbar.

Nachweis für $n = 12$

Werden die Zahlen $8, 9, 10, \ldots, 17, 18, 19$ gestrichen, so haben die verbleibenden Zahlen $1, 2, \ldots\ 7, 20, 21, \ldots, 24$ die Summe 138. Bei jeder Positionsänderung um eine Stelle nach links oder rechts ändert sich der Wert 138 jeweils um 12. Die Zahl 135 ist nicht erreichbar.

Nachweis für $n = 13$

Werden die Zahlen $11, 12, 13, \ldots, 21, 22, 23$ gestrichen, so haben die verbleibenden Zahlen $1, 2, \ldots\ 10, 24, 25, 26$ die Summe 130. Bei jeder Positionsänderung um eine Stelle nach links oder rechts ändert sich der Wert 130 jeweils um 13. Die Zahl 135 ist nicht erreichbar.

Nachweis für n = 14

Werden die Zahlen $13, 14, 15, \ldots, 24, 25, 26$ gestrichen, so haben die verbleibenden Zahlen $1, 2, \ldots\ 12, 27, 28$ die Summe 133. Bei jeder Positionsänderung um eine Stelle nach links oder rechts ändert sich der Wert 133 jeweils um 14. Die Zahl 135 ist nicht erreichbar.

Aufgabe 6

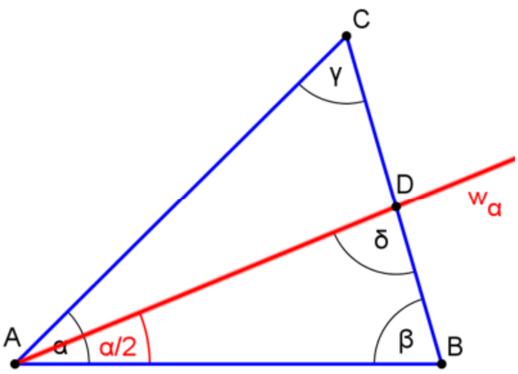
Ein gleichschenkliges Dreieck $\boldsymbol{ABC}$ wird durch die Winkelhalbierende $\boldsymbol{w_\alpha}$ in zwei Teildreiecke zerlegt. Für welche Innenwinkel $\boldsymbol{\alpha}$, $\boldsymbol{\beta}$, $\boldsymbol{\gamma}$ des Dreiecks $\boldsymbol{ABC}$ ist mindestens eines der Teildreiecke ebenfalls gleichschenklig?

Lösung:

Die gesuchten Innenwinkel $(\alpha; \beta; \gamma)$ sind:
(1) $(90°; 45°; 45°)$,
(2) $(72°; 36°; 72°)$,
(3) $(72°; 72°; 36°)$,
(4) $\left(51\frac{3}{7}°; 77\frac{1}{7}°; 51\frac{3}{7}°\right)$ und
(5) $\left(51\frac{3}{7}°; 51\frac{3}{7}°; 77\frac{1}{7}°\right)$.

Beweisvorschlag:

Der Punkt D sei der Schnittpunkt von w_α mit der Seite $\overline{BC}$.
Zunächst wird untersucht, für welche Innenwinkelwerte das Teildreieck ABD gleichschenklig wird.
Das Dreieck ABD ist in den folgenden drei Fällen gleichschenklig:



Fall 1: $\overline{AD} = \overline{BD} \iff \frac{\alpha}{2} = \beta$.
Fall 2: $\overline{AB} = \overline{BD} \iff \frac{\alpha}{2} = \delta$.
Fall 3: $\overline{AB} = \overline{AD} \iff \beta = \delta$.

Zunächst zu **Fall 1:**

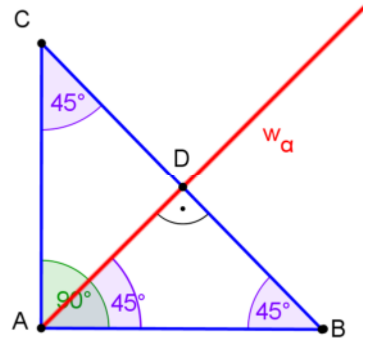
In diesem Fall ist $\gamma = 180° - (\alpha + \beta) = 180° - \left(\alpha + \frac{\alpha}{2}\right) = 180° - \frac{3}{2}\alpha$ (*)

Nach Aufgabenstellung ist auch Dreieck ABC gleichschenklig. Dafür gibt es wiederum drei Möglichkeiten:

Fall 1.1: $\overline{AC} = \overline{BC} \iff \alpha = \beta$. Das ist ein Widerspruch zu $\frac{\alpha}{2} = \beta$ (Fall 1).

Fall 1.2: $\overline{AB} = \overline{AC} \iff \beta = \gamma$.

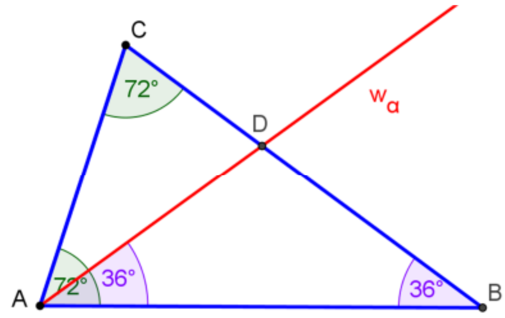
Wegen (*) und Fall 1 ist dann $\beta = \frac{\alpha}{2} = \gamma = 180° - \frac{3}{2}\alpha$. Dies ist äquivalent zu $\frac{4}{2}\alpha = 180°$ bzw. $\alpha = 90°$.
Aus $\beta = \frac{\alpha}{2} = \gamma$ folgt dann $\beta = \gamma = 45°$.
Somit erhält man
$(\alpha; \beta; \gamma) = (90°; 45°; 45°)$.
Es entstehen sogar zwei gleichschenklige Teildreiecke, diese Innenwinkelwerte führen also zu einer Lösung. Es ist Lösung (1).



Fall 1.3: $\overline{AB} = \overline{BC} \iff \alpha = \gamma$.

Wegen (*) ist dann $\alpha = \gamma = 180° - \frac{3}{2}\alpha$. Dies ist äquivalent zu $\frac{5}{2}\alpha = 180°$ bzw. $\alpha = 72°$.

Somit $\alpha = \gamma = 72°$ und $\beta = 36°$ (Winkelsumme im Dreieck).
Folglich erhält man
$(\alpha; \beta; \gamma) = (72°; 36°; 72°)$. Diese Innenwinkelwerte führen zu einer Lösung (vgl. Abb.). Es ist Lösung (2).



Nun zu **Fall 2:** $\overline{AB} = \overline{BD} \Leftrightarrow \frac{\alpha}{2} = \delta$.

In diesem Fall ist $\beta = 180° - (\alpha + \delta) = 180° - \left(\frac{\alpha}{2} + \frac{\alpha}{2}\right) = 180° - \alpha$.

Folglich $\gamma = 180° - (\alpha + \beta) = 180° - (\alpha + 180° - \alpha) = 0°$.

Dies ist nicht möglich, daher entsteht keine Lösung.

Schließlich zu **Fall 3:** $\overline{AB} = \overline{AD} \Leftrightarrow \beta = \delta$.

In diesem Fall ist wegen der Winkelsumme im Dreieck ABD: $2\beta + \frac{\alpha}{2} = 180°$,

also $\beta = 90° - \frac{1}{4}\alpha$. (**)

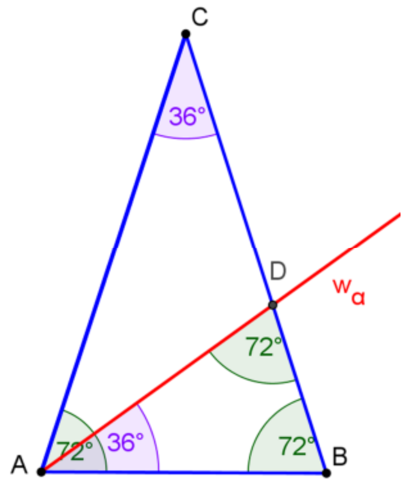
Folglich $\gamma = 180° - (\alpha + \beta) = 180° - \left(\alpha + 90° - \frac{\alpha}{4}\right) = 90° - \frac{3}{4}\alpha$. (***)

Nach Aufgabenstellung ist auch Dreieck ABC gleichschenklig. Dafür gibt es wiederum drei Möglichkeiten:

Fall 3.1: $\overline{AC} = \overline{BC} \Leftrightarrow \alpha = \beta$.

Wegen (**) folgt dann $\alpha = 90° - \frac{1}{4}\alpha \Leftrightarrow \frac{5}{4}\alpha = 90° \Leftrightarrow \alpha = 72°$.

Somit $\alpha = \beta = 72°$ und $\gamma = 36°$ (Winkelsumme im Dreieck).
Folglich erhält man
$(\alpha; \beta; \gamma) = (72°; 72°; 36°)$. Diese Innenwinkelwerte führen zu einer Lösung (vgl. Abb.). Es ist Lösung (3).



Fall 3.2: $\overline{AB} = \overline{AC} \Leftrightarrow \beta = \gamma$.

Nach (**) und (***) können aber $\beta = 90° - \frac{1}{4}\alpha$ und $\gamma = 90° - \frac{3}{4}\alpha$ nicht gleich sein (da $\alpha > 0°$). Daher entsteht in diesem Fall keine Lösung.

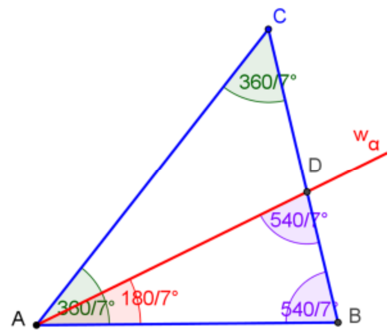
Fall 3.3: $\overline{AB} = \overline{BC} \Leftrightarrow \alpha = \gamma$.

Wegen (***) ist dann $\alpha = \gamma = 90° - \frac{3}{4}\alpha$. Dies ist äquivalent zu $\frac{7}{4}\alpha = 90°$ bzw. $\alpha = \frac{360}{7}° = 51\frac{3}{7}°$.

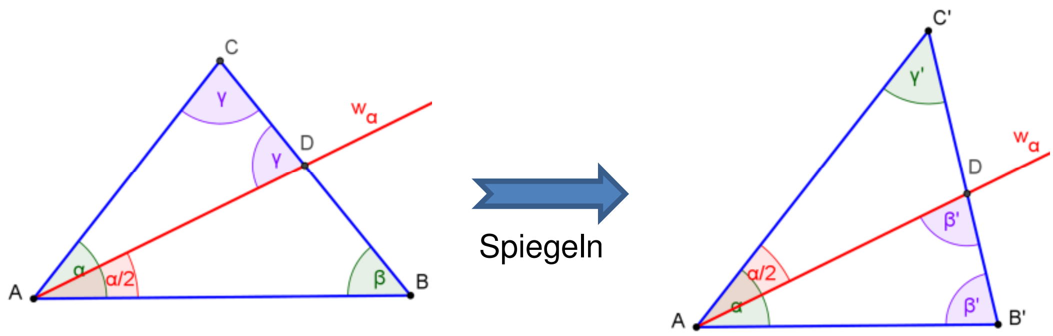
Somit $\alpha = \gamma = 51\frac{3}{7}°$ und $\beta = \frac{540}{7}° = 77\frac{1}{7}°$ (Winkelsumme).

Folglich erhält man $(\alpha;\beta;\gamma) = (51\frac{3}{7}°; 77\frac{1}{7}°; 51\frac{3}{7}°)$.

Diese Innenwinkelwerte führen zu einer Lösung. Es ist Lösung (4).



Bei Teilung durch die Winkelhalbierende w_α entsteht aber auch das Teildreieck ADC.
Jetzt werden alle Fälle untersucht, in denen das Teildreieck ADC gleichschenklig ist.
Ist in einem gleichschenkligen Dreieck ABC das Teildreieck ADC gleichschenklig, so spiegelt man ABC an der Winkelhalbierenden w_α:



ADC gleichschenklig

$AB'D$ gleichschenklig

Es entsteht ein gleichschenkliges Dreieck $AB'C'$ mit Innenwinkeln α, β', und γ'. Hierbei ist B' das Bild von C bei der Spiegelung (B' liegt auf der Geraden AB) und C' das Bild von B (C' liegt auf AC). Die Punkte A und D bleiben fest. Außerdem $\beta' = \gamma$ und $\gamma' = \beta$, d.h. $(\alpha;\beta;\gamma) = (\alpha;\gamma';\beta')$. Die Innenwinkel werden also vertauscht.
In dem gespiegelten Dreieck ist das Teildreieck $AB'D$ gleichschenklig, für die Innenwinkel $(\alpha;\beta';\gamma')$ gilt nach dem obigen Beweisgang eine der vier Lösungen (1), (2), (3), (4):

Wenn $(\alpha;\beta';\gamma') = (90°;45°;45°)$, so $(\alpha;\beta;\gamma) = (\alpha;\gamma';\beta') = (90°;45°;45°)$, es liegt also Lösung (1) vor.
Wenn $(\alpha;\beta';\gamma') = (72°;36°;72°)$, so $(\alpha;\beta;\gamma) = (\alpha;\gamma';\beta') = (72°;72°;36°)$, es liegt also Lösung (3) vor.
Wenn $(\alpha;\beta';\gamma') = (72°;72°;36°)$, so $(\alpha;\beta;\gamma) = (\alpha;\gamma';\beta') = (72°;36°;72°)$, es liegt also Lösung (2) vor.
Wenn $(\alpha;\beta';\gamma') = \left(51\frac{3}{7}°;77\frac{1}{7}°;51\frac{3}{7}°\right)$, so $(\alpha;\beta;\gamma) = (\alpha;\gamma';\beta') = \left(51\frac{3}{7}°;51\frac{3}{7}°;77\frac{1}{7}°\right)$, es liegt also Lösung (5) vor.

Somit ist bewiesen, dass nur für die fünf Lösungen (1)-(5) mindestens ein gleichschenkliges Teildreieck vorliegt und dass alle fünf Lösungen auch tatsächlich zu einem gleichschenkligen Teildreieck führen.