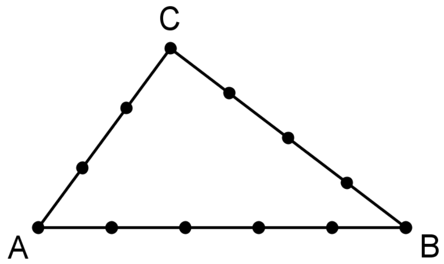
Landeswettbewerb Mathematik
Baden-Württemberg
Musterlösungen 1. Runde 2014/2015

Aufgabe 1

Die Zahlen 1, 2, 3, …, 12 werden auf die markierten Punkte des nebenstehenden Dreiecks verteilt. Dabei hat die Summe der Zahlen jeder Seite den Wert 28.

Bestimme alle möglichen Zahlen, die am Eckpunkt A stehen können.



Lösung:

Am Eckpunkt A können nur die beiden Zahlen 2 oder 3 stehen.

Beweisvorschlag:

Die Zahlen an den Ecken A, B und C seien mit a, b und c bezeichnet.
Addiert man die Summen der Zahlen der drei Seiten, so erhält man $3 \cdot 28 = 84$, da sich ja an jeder Seite die Summe 28 ergibt. Dabei zählt man die Zahlen a, b und c zweimal, da die Eckpunkte A, B und C zu jeweils zwei Seiten gehören. Alle anderen Zahlen von 1 bis 12 kommen einmal vor.

Wäre z.B. $a = 3$, $b = 5$ und $c = 8$, so würde sich jetzt als Summe der Zahlen für alle drei Seiten ergeben: $1+2+2\cdot 3+4+2\cdot 5+6+7+2\cdot 8+9+10+11+12$. Die Eckzahlen 3, 5, 8 muss man immer mit zwei multiplizieren, da sie an zwei Seiten vorkommen.
Das kann man umsortieren:
$1+2+2\cdot 3+4+2\cdot 5+6+7+2\cdot 8+9+10+11+12$
$=1+2+3+4+5+6+7+8+9+10+11+12+3+5+8$
Vorne steht die Summe aller 12 Zahlen 1,2,3…,12, hinten die Summe der drei Eckzahlen.

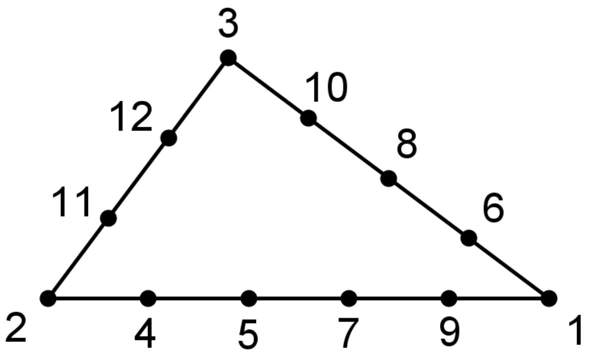
Geht man weg vom Beispiel wieder zum allgemeinen Fall, so ergibt sich also für die Summe der Zahlen an allen drei Seiten:
$1+2+3+4+5+6+7+8+9+10+11+12+a+b+c$.
Diese Zahl muss 84 sein. Da $1+2+3+...+11+12 = 78$ folgt also
$84 = 1+2+3+...+11+12+a+b+c = 78+a+b+c$.
Das bedeutet, dass die Summe $a+b+c$ der drei Eckzahlen $84-78=6$ ergeben muss.

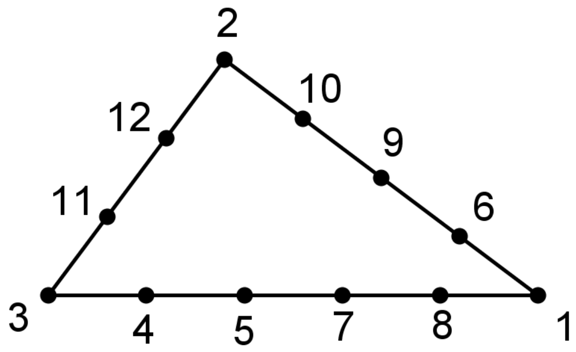
Der Summenwert 6 wird aber mit drei verschiedenen der vorgegebenen Zahlen nur in der Summe $1+2+3$ (in beliebiger Reihenfolge) angenommen. Wäre eine der Eckzahlen größer als drei, so wäre die Summe der drei Eckzahlen sicher größer als 6.

Deswegen müssen a, b und c jeweils eine der Zahlen 1, 2 oder 3 sein.

Wäre $a = 1$, dann erreicht man an der Seite AC, die nur vier Zahlen hat, niemals die vorgegebene Summe 28, selbst wenn die anderen drei Zahlen so groß wie möglich sind. Der größtmögliche Wert ist $1 + 11 + 12 + 3 = 27$. Das ist also nicht möglich.

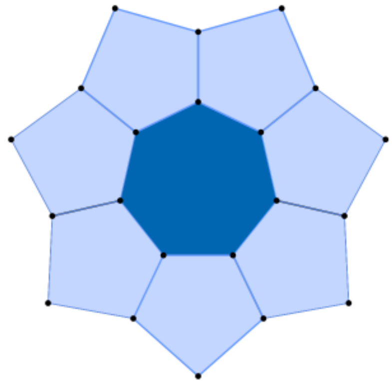
Dass $a = 2$ und $a = 3$ jeweils möglich sind, zeigen die folgenden beiden Beispiele:





Es kann also 2 oder 3 an der Ecke A stehen, außer 2 oder 3 kann aber keine andere Zahl stehen. Das war zu zeigen.

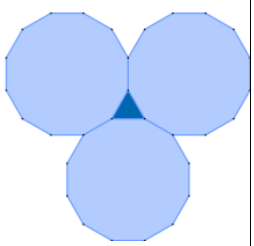
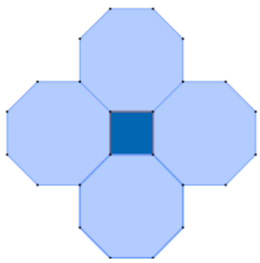
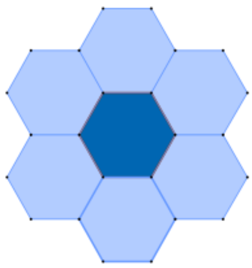
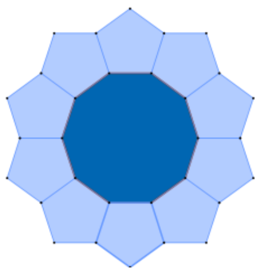
Aufgabe 2



Jedes regelmäßige n-Eck kann von n kongruenten Platten fugenlos umrahmt werden, wie es die nebenstehende Zeichnung am Beispiel $n = 7$ mit fünfeckigen Platten zeigt.
Für welche Werte von n können diese Platten regelmäßige Vielecke sein? Wie viele Ecken haben diese Platten dann?
Bemerkung: Ein Vieleck heißt regelmäßig, wenn alle Seiten gleich lang und alle Innenwinkel gleich groß sind.

Lösung:

Die gesuchten Werte für n und die zugehörigen Eckenzahlen m der umrahmenden Platten sind in folgender Tabelle zusammengefasst:

n	3	4	6	10
m	12	8	6	5
Skizze				

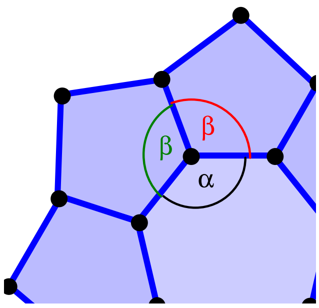
1. Beweisvorschlag:

Die Summe der Innenwinkel in einem n-Eck ergibt bekanntlich $(n-2)\cdot 180°$
Da alle Innenwinkel im regelmäßigen n-Eck gleich sind, folgt

$$\alpha = \frac{(n-2)\cdot 180°}{n} \qquad (1)$$

für den Innenwinkel α im regelmäßigen n-Eck.
Sind die umrahmenden Platten ebenfalls regelmäßig, so sind ihre Innenwinkel β auch alle gleich groß. An jedem Eckpunkt des n-Ecks treffen zwei Platten zusammen, also gilt $\alpha + 2\cdot\beta = 360°$.
bzw.

$$\beta = 180° - \frac{\alpha}{2} \qquad (2)$$



Mit den beiden Gleichungen (1) und (2) kann man nun folgende Tabelle für die ersten möglichen Werte für n erstellen:

n	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
α	60°	90°	108°	120°	$128\frac{4}{7}$°	135°	140°	144°	$147\frac{3}{11}$°	150°
β	150°	135°	126°	120°	$115\frac{5}{7}$°	$112\frac{1}{2}$°	110°	108°	$106\frac{4}{11}$°	105°

Weil $\alpha < 180°$ ist, ist $\frac{\alpha}{2} < 90°$. Somit ist $\beta = 180° - \frac{\alpha}{2} > 90°$.

Sind die umrahmenden Platten regelmäßige Vielecke, so kommen für β ebenfalls nur Werte der zweiten Zeile der Tabelle in Frage.

Man erkennt, dass alle Werte der zweiten Zeile, die größer als 90° sind, sogar mindestens 108° sind. Weil $\beta > 90°$ ist, muss also auch $\beta \geq 108°$ sein. Da mit wachsendem n der Wert von α steigt und entsprechend der von β fällt, kann man der dritten Zeile der Tabelle entnehmen, dass $\beta \geq 108°$ nur für $n \leq 10$ gelten kann.

Für den nun noch möglichen Bereich $3 \leq n \leq 10$ kann man wiederum der Tabelle entnehmen, dass genau für die vier in der Lösung genannten und in der Tabelle grün markierten Werte von n der Winkelwert von β auch in der zweiten Zeile vorkommt, also eine Innenwinkelgröße eines regelmäßigen Vielecks ist. In den weiß markierten Spalten können die Werte von β nicht in der zweiten Zeile vorkommen, auch wenn man die zweite Zeile nach rechts erweitert. Die entsprechenden Eckenzahlen m dieser Platten liest man schließlich ebenfalls mithilfe der zweiten und ersten Zeile der Tabelle ab: Zu $\beta = 150°$ gehört $m = 12$, zu $\beta = 135°$ gehört $m = 8$, zu $\beta = 120°$ gehört $m = 6$ und zu $\beta = 108°$ gehört $m = 5$. Das sind genau die in der Lösung genannten vier Möglichkeiten für n und m. Wie in den Zeichnungen gibt es in allen vier Fällen auch Lösungen zur Aufgabe.

2. Beweisvorschlag:

Die Gleichungen (1) und (2) werden wie im 1. Beweisvorschlag hergeleitet. Entsprechend zu (2) folgt auch für β:

$$\beta = \frac{(m-2)\cdot 180°}{m} \qquad (3).$$

Setzt man (1) und (3) in (2) ein, so erhält man $\frac{(m-2)\cdot 180°}{m} = 180° - \frac{(n-2)\cdot 180°}{2n}$.

Dividiert man diese Gleichung durch 180° und multipliziert sie mit $2\cdot m\cdot n$, so ergibt sich daraus: $(m-2)\cdot 2n = 2\cdot m\cdot n - (n-2)\cdot m$. Durch Ausmultiplizieren folgt

$2\cdot m\cdot n - 4\cdot n = 2\cdot m\cdot n - n\cdot m + 2\cdot m$ bzw. $m\cdot n - 2\cdot m = 4\cdot n$ oder $m\cdot(n-2) = 4\cdot n$.

Somit ist $n-2$ ein Teiler von 4n. Es liegt also nahe nachzuprüfen, wie oft $n-2$ in 4·n passt. Es ist $4\cdot(n-2) = 4n-8$. Da die linke Seite durch $n-2$ teilbar ist, ist auch die rechte Seite durch $n-2$ teilbar. Wenn nun aber auf der rechten Seite 4n durch $n-2$ teilbar ist, so muss auch 8 durch $n-2$ teilbar sein.

Die Teiler von 8 sind 1, 2, 4 und 8. Für n ergeben sich also die Zahlen 3, 4, 6 und 10.

Aus $m = \frac{4\cdot n}{n-2}$ ergibt sich für m die Werte 12, 8, 6 und 5.

Für diese Werte von n und m ergeben sich die Innenwinkel der Vielecke wie im 1. Beweisvorschlag. So entstehen die vier lückenlosen und überscheidungsfreien Muster, die in der Lösung angegeben wurden.

Aufgabe 3

Das Produkt von vier nicht unbedingt verschiedenen Primzahlen ist das Zehnfache ihrer Summe. Bestimme alle Möglichkeiten für diese vier Primzahlen.

Lösung:

Die einzige Möglichkeit für die vier Primzahlen ist 2, 3, 5, 5.

1. Beweisvorschlag (durch Faktorisierung):

Die vier Primzahlen seien mit a, b, c und d bezeichnet. Dann soll folgende Gleichung gelten:

$$a \cdot b \cdot c \cdot d = 10 \cdot (a + b + c + d). \qquad (1)$$

Weil $10 = 2 \cdot 5$ ist, müssen die Primzahlen 2 und 5 unter den vier gesuchten Primzahlen sein. Wir nehmen an, es sei (eventuell nach Vertauschung) $a = 2$ und $b = 5$. Setzt man dies in (1) ein und dividiert durch 10, so folgt $c \cdot d = 2 + 5 + c + d$.
Diese Gleichung kann man umformen zu $c \cdot d - c - d + 1 = 8$ bzw.

$$(c - 1) \cdot (d - 1) = 8. \qquad (2)$$

Weil $c > 1$ und $d > 1$ ist, sind auf der linken Seite von (2) beide Faktoren positiv und ganzzahlig. Wir nehmen an, dass $c \leq d$ ist (sonst vertauschen wir c und d). Somit gibt es hierfür nur die beiden Möglichkeiten $c - 1 = 1$ und $d - 1 = 8$ oder $c - 1 = 2$ und $d - 1 = 4$.
Die erste Lösung liefert $d = 9$, was keine Primzahl ist. Deswegen bleibt nur die zweite Möglichkeit mit $c = 3$ und $d = 5$.

Die vier Primzahlen können also nur 2, 3, 5 und 5 sein. Tatsächlich gilt $2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 5 = 10 \cdot (2 + 3 + 5 + 5)$.

2. Beweisvorschlag (mit Abschätzungen):

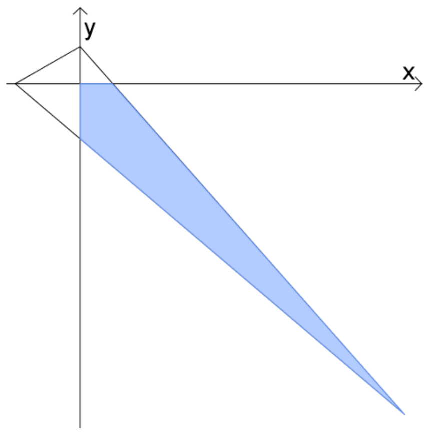
Wie im 1. Beweisvorschlag folgt mit Gleichung (1) $a = 2$ und $b = 5$.
Damit ergibt sich wieder $c \cdot d = 2 + 5 + c + d$. Wir können annehmen, dass $c \leq d$ gilt.

Wir zeigen, dass dann $c < 5$ sein muss. Wäre nämlich $c \geq 5$, dann folgt $5 \cdot d \leq c \cdot d = 2 + 5 + c + d \leq 7 + d + d = 7 + 2 \cdot d$.
Aus $5 \cdot d \leq 7 + 2 \cdot d$ ergibt sich aber $3 \cdot d \leq 7$. Dies ist wegen $5 \leq c \leq d$ unmöglich.

Also ist $c < 5$ und es bleiben nur die beiden Möglichkeiten $c = 2$ oder $c = 3$. Aus $c \cdot d = 2 + 5 + c + d$ ergibt sich daraus für $c = 2$ nun $d = 9$, was keine Primzahl ist. Für $c = 3$ ergibt sich $d = 5$, was zur angegebenen Lösung führt.

Aufgabe 4

Zwei Eckpunkte eines Dreiecks liegen auf den Achsen eines Koordinatensystems, sein dritter Eckpunkt liegt im 4. Quadranten. Die Inhalte der auf den 1., 2. und 3. Quadranten entfallenden Teilflächen des Dreiecks verhalten sich wie 1:2:3.
Welcher Anteil der Dreiecksfläche liegt im 4. Quadranten?



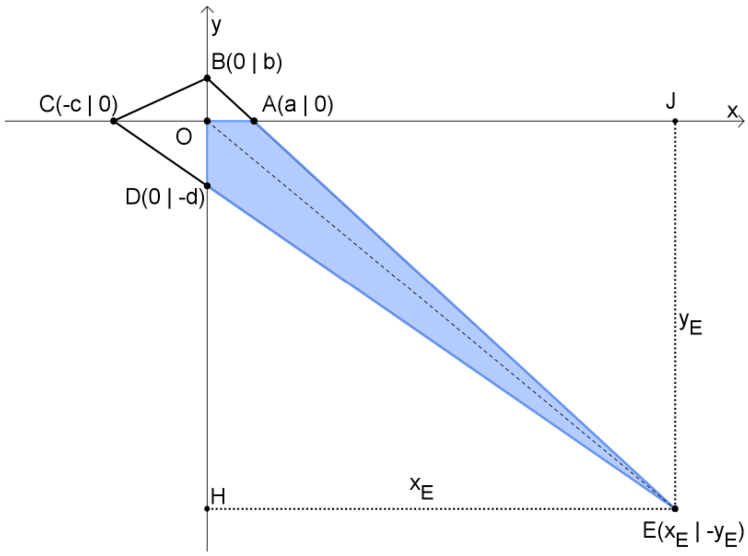
Lösung:

Im 4. Quadranten liegen 80% der Dreiecksfläche.

1. Beweisvorschlag (Schnittpunkt von Geraden):

Der Eckpunkt des Dreiecks im 4. Quadranten sei der Punkt $E(x_E|-y_E)$ mit $x_E > 0$ und $y_E > 0$.

Da nach Aufgabenstellung alle vier Quadranten einen Flächenanteil des Dreiecks enthalten, muss für den Eckpunkt $B(0|b)$ die Beziehung $b > 0$ gelten. Der Schnittpunkt der Seite BE mit der x-Achse ist der Punkt $A(a|0)$ mit $a > 0$. Der Eckpunkt des Dreiecks auf der x-Achse ist der Punkt $C(-c|0)$ mit $c > 0$.



Der Schnittpunkt der Seite CE mit der y-Achse ist der Punkt $D(0|-d)$ mit $d > 0$.
Der Flächeninhalt F(OAB) von Dreieck OAB ist $F(OAB) = \frac{1}{2} \cdot a \cdot b$, der von Dreieck OBC ist $F(OBC) = \frac{1}{2} \cdot c \cdot b$. Aus $F(OBC) = 2 \cdot F(OAB)$ folgt $\frac{1}{2} \cdot c \cdot b = a \cdot b$ bzw. $c = 2a$.
Analog ist $F(OCD) = \frac{1}{2} \cdot c \cdot d$. Aus $F(OCD) = 3 \cdot F(OAB) = 3 \cdot \frac{1}{2} \cdot F(OBC)$ folgt $\frac{1}{2} \cdot c \cdot d = \frac{3}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot b \cdot c$ oder $d = \frac{3}{2} \cdot b$.

Die Gerade BA hat dann die Gleichung $y = -\frac{b}{a} \cdot x + b$, die Gerade CD hat die Gleichung $y = -\frac{d}{c} \cdot x - d = -\frac{3}{4} \cdot \frac{b}{a} \cdot x - \frac{3}{2} \cdot b$.
Die x-Koordinate des Schnittpunkts E dieser beiden Geraden ergibt sich als Lösung der Gleichung $-\frac{b}{a} \cdot x + b = -\frac{3}{4} \cdot \frac{b}{a} \cdot x - \frac{3}{2} \cdot b$. Nach Multiplikation mit 4a und Division durch b

ergibt sich hieraus $-4x+4a=-3x-6a$ und somit $x=x_E=10a$. Setzt man dies in eine der beiden Geradengleichungen ein, so erhält man $y=-y_E=-9b$ bzw. $y_E=9b$.
Der Inhalt der im 4. Quadranten liegenden Teilfläche des Dreiecks CEB ergibt sich jetzt als Summe der Inhalte der Dreiecksflächen ODE und OEA zu

$$F(ODE)+F(OEA)=\tfrac{1}{2}\cdot d\cdot x_E+\tfrac{1}{2}\cdot a\cdot y_E=\tfrac{3}{4}\cdot b\cdot 10a+\tfrac{1}{2}\cdot a\cdot 9b=12ab.$$

Der Gesamtflächeninhalt des Dreiecks BCE ergibt sich zu

$$F(ODE)+F(OEA)+F(OAB)+F(OBC)+F(OCD)=12ab+\tfrac{1}{2}ab+\tfrac{1}{2}\cdot 2ab+\tfrac{1}{2}\cdot 2a\cdot\tfrac{3}{2}b=15ab.$$

Somit entfallen auf den 4. Quadranten $\frac{12ab}{15ab}=\frac{4}{5}=80\%$ der Dreiecksfläche von BCE.

2. Beweisvorschlag (mit Strahlensatz):

Wie im 1. Beweisvorschlag werden die in der Zeichnung angegebenen Punkte mit ihren Koordinaten eingeführt (s. Abbildung vom 1. Beweisvorschlag).

Wendet man in der aus den beiden rechtwinkligen Dreiecken BOA und BHE bestehenden Figur den Strahlensatz an, so ergibt sich $\frac{x_E}{a}=\frac{b+y_E}{b}$ (1).
Wendet man in der aus den beiden rechtwinkligen Dreiecken CDO und CEJ bestehenden Figur den Strahlensatz an, so ergibt sich $\frac{y_E}{d}=\frac{c+x_E}{c}$ (2).
Wie im 1. Beweisvorschlag ergibt sich dabei $c=2a$ und $d=\tfrac{3}{2}\cdot b$. Somit folgt aus (2) und (1): $\frac{2}{3}\cdot\frac{y_E}{b}=1+\frac{x_E}{2a}=1+\frac{1}{2}\cdot\left(1+\frac{y_E}{b}\right)=\frac{3}{2}+\frac{1}{2}\cdot\frac{y_E}{b}$.
Umformung dieser Gleichung ergibt $\frac{2}{3}\cdot\frac{y_E}{b}-\frac{1}{2}\cdot\frac{y_E}{b}=\frac{1}{6}\cdot\frac{y_E}{b}=\frac{3}{2}$ oder $y_E=9b$. Setzt man dies in (1) ein, so folgt $x_E=10a$.
Das Rechteck OHEJ hat den Flächeninhalt $F(OHEJ)=x_E\cdot y_E=90ab$. Das rechtwinklige Dreieck AEJ hat den Flächeninhalt $F(AEJ)=\tfrac{1}{2}\cdot(x_E-a)\cdot y_E=\tfrac{1}{2}\cdot 9a\cdot 9b=40{,}5ab$.
Das rechtwinklige Dreieck DHE hat den Flächeninhalt

$$F(DHE)=\tfrac{1}{2}\cdot(y_E-d)\cdot x_E=\tfrac{1}{2}\cdot(9b-1{,}5b)\cdot 10a=\tfrac{1}{2}\cdot 75ab=37{,}5ab.$$

Somit ist der Flächeninhalt des Flächenanteils des Dreiecks BCE im 4. Quadranten

$$F(ODEA)=F(OHEJ)-F(AEJ)-F(DHE)=90ab-40{,}5ab-37{,}5ab=12ab.$$

Das gesamt Dreieck BCE hat den Flächeninhalt

$$F(BCE)=F(ODEA)+F(OAB)+F(OBC)+F(OCD)=12ab+\tfrac{1}{2}ab+\tfrac{1}{2}\cdot 2ab+\tfrac{1}{2}\cdot 2a\cdot\tfrac{3}{2}b=15ab.$$

Somit entfallen auf den 4. Quadranten $\frac{12ab}{15ab}=\frac{4}{5}=80\%$ der Dreiecksfläche von BCE.

Aufgabe 5

Zwischen die Zahlen 4, 5, 6, …, n werden Plus- und Minuszeichen geschrieben. So entsteht ein Term.
Für welche Werte von n kann dieser Term den Wert 0 annehmen?

Lösung:

Der Term kann den Wert 0 genau dann annehmen, wenn $n \geq 7$ ist und n durch 4 teilbar ist oder aber beim Teilen durch 4 den Rest 3 lässt, also $n+1$ durch 4 teilbar ist.

1. Beweisvorschlag:

Für $n = 4$ lässt sich allein mit der Zahl 4 der Termwert 0 nicht erreichen. Sei also im Folgenden $n > 4$.

Lässt die Zahl n beim Teilen durch 4 den Rest 3, ist also n eine Zahl der Folge 7, 11, 15, …, dann ist die Anzahl der Zahlen in der Reihe 4, 5, 6, …, n durch 4 teilbar. Man kann dann die vorgegebenen Zahlen der Reihe nach in Vierergruppen zusammenfassen:
$\{4, 5, 6, 7\}$, $\{8, 9, 10, 11\}$, …, $\{n-3, n-2, n-1, n\}$. Da von vier aufeinanderfolgenden Zahlen die beiden mittleren stets dieselbe Summe haben wie die erste und die letzte, kann man durch Setzen der Plus- und Minuszeichen innerhalb der Vierergruppen nach dem Muster „$+, -, -, +$" in jeder Vierergruppe die Summe 0 erreichen und damit auch insgesamt:

$$(4-5-6+7)+(8-9-10+11)+\ldots+((n-3)-(n-2)-(n-1)+n)$$
$$=4-5-6+7+8-9-10+11+\ldots+(n-3)-(n-2)-(n-1)+n=0.$$

Ist n durch 4 teilbar, ist n also eine Zahl der Folge 8, 12, 16, …, dann kann man die vorgegebenen Zahlen in eine Fünfergruppe und danach der Reihe nach in Vierergruppen aufeinanderfolgender Zahlen zusammenfassen:
$\{4, 5, 6, 7, 8\}$, $\{9, 10, 11, 12\}$, $\{13, 14, 15, 16\}$,…, $\{n-3, n-2, n-1, n\}$.
In der ersten Gruppe erreicht man die Summe 0 durch $4+5+6-7-8=0$. Innerhalb der Vierergruppen ergibt sich die Summe 0 wieder wie im vorherigen Fall. Insgesamt ist also auch in diesem Fall der Summenwert 0 möglich:

$$(4+5+6-7-8)+(9-10-11+12)+(13-14-15+16)+\ldots+((n-3)-(n-2)-(n-1)+n)$$
$$=4+5+6-7-8+9-10-11+12\ldots+(n-3)-(n-2)-(n-1)+n=0.$$

Ist umgekehrt ein Termwert 0 durch geeignetes Setzen der Plus- und Minuszeichen möglich, so kann man schrittweise jedes Minuszeichen vor einer Zahl k in ein Pluszeichen verwandeln, wodurch sich der Termwert um $2k$, also um eine gerade Zahl, erhöht. Nachdem man alle Minus- in Pluszeichen geändert hat, erhält man die Summe $4+5+6+...+(n-1)+n$. Sie muss folglich gerade sein, wenn der Termwert zu Beginn 0 (also gerade) war.

Bekanntlich ist $1+2+3+4+5+6+...+(n-1)+n=\frac{n\cdot(n+1)}{2}$, also ist

$4+5+6+...+(n-1)+n=\frac{n\cdot(n+1)}{2}-6$. Diese Zahl ist genau dann gerade, wenn $\frac{n\cdot(n+1)}{2}$ gerade ist. Wenn $\frac{n\cdot(n+1)}{2}$ gerade sein soll, so muss eine der beiden aufeinanderfolgenden Zahlen n und $n+1$ sogar durch 4 teilbar sein, denn nur eine kann gerade sein.
Es gibt also zwei Fälle: Entweder ist n durch 4 teilbar oder $n+1$. Letzteres ist genau dann der Fall, wenn n bei der Division durch 4 den Rest 3 lässt. Dass in diesen beiden Fällen der Termwert 0 möglich ist, würde oben beweisen. Wenn n bei der Division durch 4 den Rest 1 oder 2 lässt, ist der Termwert 0 nicht möglich.

2. Beweisvorschlag:

Ist der Termwert mit den Plus- und Minuszeichen vor 4,5,6,…,n gleich 0, so kann man diese Gleichung äquivalent umformen, indem man auf beiden Seiten die Zahlen addiert, vor denen zu Beginn ein Minuszeichen stand. Dann steht auf der linken Seite die Summe s aller Zahlen, vor denen zu Beginn ein Pluszeichen stand, auf der rechten Seite steht die Summe aller Zahlen vor denen zu Beginn ein Minuszeichen stand. Beide Summen ergeben die gleiche Zahl s.
Man hat also die Zahlen 4,5,6,…,n in zwei Pakete unterteilt, deren Summe s ergibt.
Somit ist $4+5+6+...+(n-1)+n=2s$, also gerade. Folglich ist

$2\cdot(4+5+6+...+(n-1)+n)=4s$ durch 4 teilbar. Nach Umordnung der Summanden im Ausdruck

$2\cdot(4+5+6+...+(n-1)+n)=(4+5+6+...+(n-1)+n)+(4+5+6+...+(n-1)+n)$ ergibt sich

$$\begin{aligned}
&2\cdot(4+5+6+...+n)\\
&=[4+5+6+...(n-1)+n]+[n+(n-1)+(n-2)...+5+4]\\
&=\underbrace{(4+n)+(5+(n-1))+(6+(n-2))+...+((n-1)+5)+(n+4)}_{n-3\text{ Summanden}}\\
&=(n-3)\cdot(n+4).
\end{aligned}$$

Weil genau eine der beiden sich um 7 unterscheidenden Zahlen $n-3$ und $n+4$ gerade ist, kann $(n-3)\cdot(n+4)$ nur durch 4 teilbar sein, wenn entweder $n-3$ oder $n+4$ durch 4 teilbar ist. Das entspricht genau den beiden Fällen, in denen n oder $n+1$ durch 4 teilbar ist. Nur in diesen beiden Fällen kann der Termwert 0 sein.

Ist nun umgekehrt $n+1$ durch 4 teilbar, so ist die Anzahl der Zahlen in der Folge 4, 5, 6, …, n durch 4 teilbar, dies sind nämlich genau $n-3$ Zahlen.
Dann kann man aus diesen Zahlen eine gerade Anzahl an Paaren (nämlich $\frac{n-3}{2}$) mit gleicher Summe $n+4$ bilden:
$\{4,n\}$, $\{5,n-1\}$, $\{6,n-2\}$, $\{7,n-3\}$, ..., $\{\frac{n+3}{2},\frac{n+5}{2}\}$.
Setzt man nun vor die Zahlen der ersten Hälfte (also vor $\frac{n-3}{4}$) der Paare Pluszeichen und vor die übrigen Zahlen Minuszeichen, so erhält man als Wert des entstehenden Terms logischerweise 0, da ja alle Paare dieselbe Summe $n+4$ haben.
Genauer:

$$4+n+5+(n-1)+6+(n-2)+...+\tfrac{n+9}{4}+\tfrac{3n+7}{4}-\tfrac{n+13}{4}-\tfrac{3n+3}{4}-...-\tfrac{n+3}{2}-\tfrac{n+5}{2}$$
$$=[4+n]+[5+(n-1)]+[6+(n-2)]+...+\left[\tfrac{n+9}{4}+\tfrac{3n+7}{4}\right]-\left[\tfrac{n+13}{4}+\tfrac{3n+3}{4}\right]-...-\left[\tfrac{n+3}{2}+\tfrac{n+5}{2}\right]$$
$$=\tfrac{n-3}{4}\cdot(n+4)-\tfrac{n-3}{4}\cdot(n+4)=0.$$

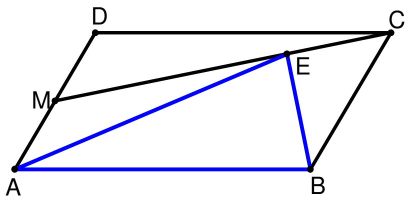
Ist n durch 4 teilbar, dann kann man zunächst mit den Zahlen der Gruppe $\{4,5,6,7,8\}$ durch $4+5+6-7-8=0$ den Termwert 0 erreichen. Die Anzahl der übrigen aufeinanderfolgenden Zahlen 9, 10, …, n ist durch 4 teilbar und man kann wie im vorherigen Fall eine gerade Zahl von Paaren mit gleicher Summe bilden. Durch geeignete Setzung von Plus- und Minuszeichen kann man dann wieder den Termwert 0 erreichen.

3. Beweisvorschlag:

Wie in den obigen beiden Beweisvorschlägen zeigt man, dass n durch vier teilbar sein muss oder $n-3$ durch 4 teilbar sein muss ($n\geq 7$).
Ist umgekehrt $n-3$ durch 4 teilbar, so ist die Anzahl $a=n-3$ der Summanden durch 4 teilbar. Man kann die a Summanden in drei Päckchen einteilen: die $\frac{a}{4}$ kleinsten, die $\frac{a}{4}$ größten und die $\frac{a}{2}$ mittleren Summanden.
Vor die kleinsten und die größten Zahlen wird das Pluszeichen geschrieben, vor die mittleren Zahlen das Minuszeichen. Da die $\frac{a}{4}$ kleinsten und die $\frac{a}{4}$ größten Zahlen zusammen so groß sind wie die $\frac{a}{2}$ mittleren Zahlen, hat der entstehende Term nun den Wert 0.
Ändert man in diesem Term das Vorzeichen vor der Zahl $\frac{n+1}{2}$, so ändert sich der Wert des Terms um n+1, er wird also +(n+1), wenn $\frac{n+1}{2}$ zu den mittleren Zahlen gehört, und –(n+1) sonst (das ist nur für n = 7 der Fall). Subtrahiert bzw. addiert man nun wieder n+1, so ergibt sich wieder der Wert 0. Für die Nachfolgerzahl von n, die durch 4 teilbare Zahl n+1, lässt sich also ebenfalls der Termwert 0 erreichen.

Beispiel: Ändern der Summe für n = 15 auf n+1 = 16.
n = 15: $a=\frac{15-3}{4}=3$. Drei Päckchen: Kleinste Zahlen $\{4;5;6\}$; mittlere Zahlen $\{7;8;9;10;11;12\}$; größte Zahlen $\{13;14;15\}$.
Term mit Wert 0 für 15: $+4+5+6-7-8-9-10-11-12+13+14+15=0$.
Mittlere Zahl $\frac{15+1}{2}=8$ wird von Minus nach Plus abgeändert:
$+4+5+6-7+8-9-10-11-12+13+14+15=16$
Term mit Wert 0 für 16: $+4+5+6-7+8-9-10-11-12+13+14+15-16=0$

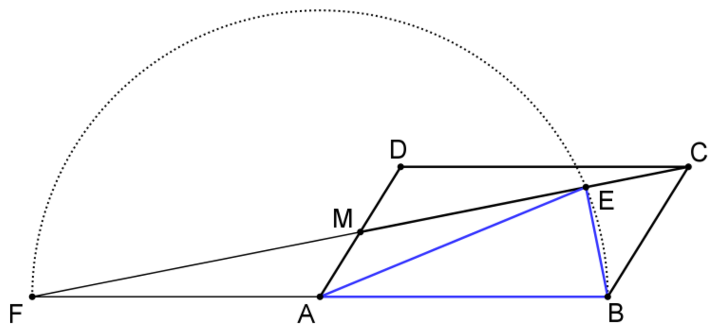
Aufgabe 6



Im Parallelogramm ABCD ist M der Mittelpunkt der Seite DA und E ein Punkt auf der Strecke MC.

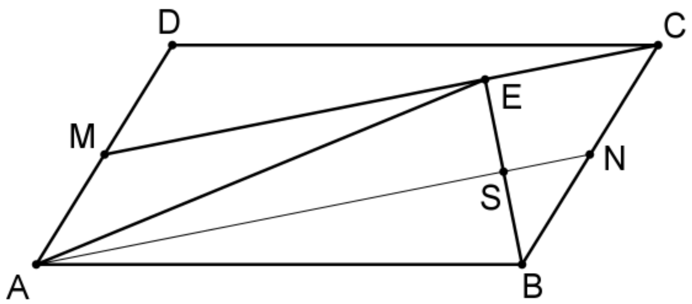
Beweise: Das Dreieck ABE ist genau dann gleichschenklig mit Basis BE, wenn BE das Lot von B auf MC ist.

1. Beweisvorschlag (mit Satz des Thales):



Sei F der Schnittpunkt der beiden Geraden MC und AB. Aufgrund des Strahlensatzes ist
$\frac{\overline{FA}}{\overline{FB}} = \frac{\overline{AM}}{\overline{BC}} = \frac{1}{2}$ also $\overline{FA} = \overline{AB}$.
Das Dreieck ABE ist also genau dann gleichschenklig mit Basis BE, wenn $\overline{FA} = \overline{AE}$ ist.
Dies wiederum ist genau denn der Fall wenn E auf dem Kreis um A durch F liegt.
Da wegen $\overline{FA} = \overline{AB}$ auch B auf diesem Kreis liegt, ist dieser Kreis der Thaleskreis über FB.
Nach dem Satz des Thales und seiner Umkehrung liegt E genau dann auf dem Thaleskreis über FB, wenn $\sphericalangle FEB = \sphericalangle MEB = 90°$, d.h. wenn BE das Lot von B auf MC ist.

2. Beweisvorschlag (mit Symmetrie):



Sei N der Mittelpunkt der Strecke BC und S der Schnittpunkt der Strecken AN und BE.
Aufgrund der Punktsymmetrie des Parallelogramms ist AN parallel zu MC, also auch SN parallel zu EC.

Aufgrund des Strahlensatzes ist $\frac{\overline{EB}}{\overline{SB}} = \frac{\overline{CB}}{\overline{NB}} = 2$, also ist S der Mittelpunkt der Strecke EB.

Das Dreieck ABE ist nun genau dann gleichschenklig mit Basis BE, wenn die Seitenhalbierende AS Symmetrieachse des Dreiecks ist, also genau dann, wenn AS senkrecht auf EB steht. Dies wiederum ist aufgrund der Parallelität von AS und MC genau dann der Fall, wenn EB senkrecht auf MC steht, also das Lot von B auf MC ist.