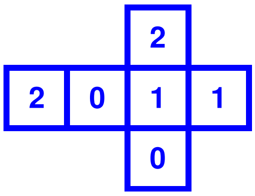
Landeswettbewerb Mathematik
Baden-Württemberg
Musterlösungen 1. Runde 2011/2012

Aufgabe 1

David wirft einen besonderen Würfel und schreibt jeweils die oben liegende Zahl auf. Die Abbildung zeigt ein Netz seines Würfels.



Wie oft muss David mindestens würfeln, damit unter den aufgeschriebenen Zahlen ganz sicher drei Zahlen sind, deren Summe durch 3 teilbar ist?

Lösung:
David muss mindestens **fünf** Mal würfeln.

1. Beweisvorschlag:

1. Behauptung: *Wenn David fünf Mal würfelt, dann befinden sich unter seinen aufgeschriebenen Zahlen immer drei Zahlen, deren Summe durch 3 teilbar ist.*

Beweis der 1. Behauptung:
Es kann nur eine der beiden folgenden Situationen eintreten:

<u>Situation A:</u> *Unter Davids aufgeschriebenen Zahlen kommt eine Zahl dreimal vor.*
Wir können dann die Summe der dreifach vorkommenden Zahl bilden, also eine der folgenden Summen: $0 + 0 + 0 = 0$ oder $1 + 1 + 1 = 3$ oder $2 + 2 + 2 = 6$. Diese Summen sind alle durch 3 teilbar.

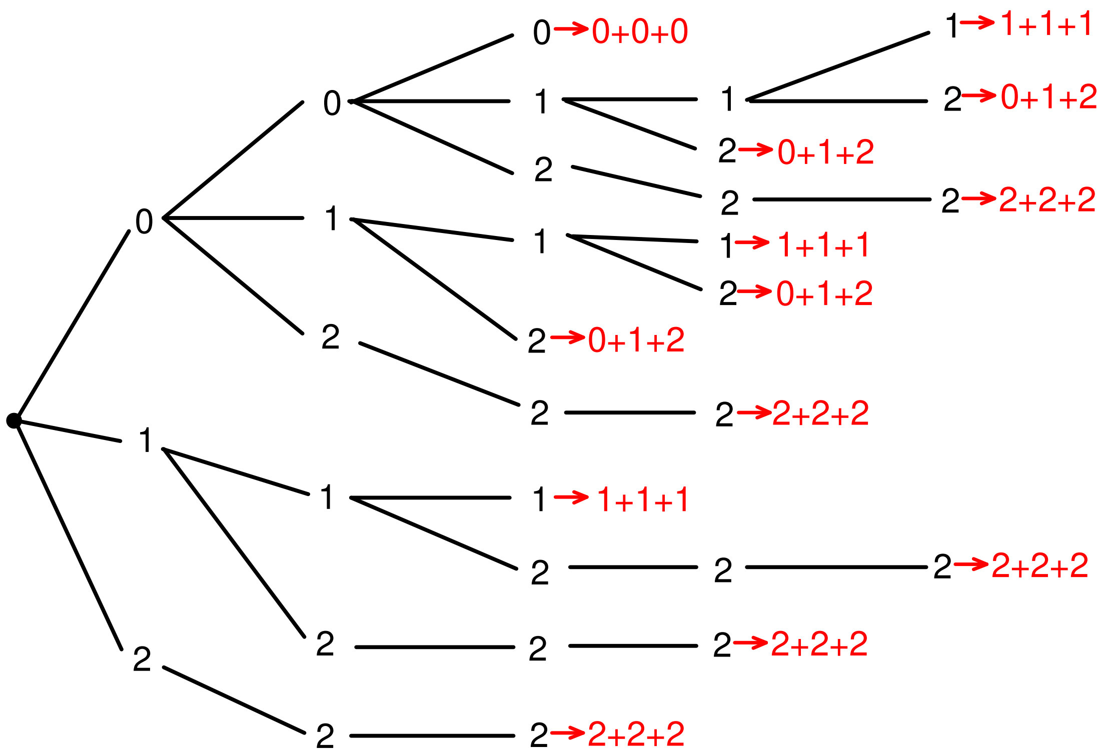
<u>Situation B:</u> *Unter Davids aufgeschriebenen Zahlen kommt keine Zahl dreimal vor.*
Dann kommt jede Zahl höchstens zwei Mal vor. Die 0 kommt also höchstens zweimal vor, ebenso die 1. Es muss also unter den fünf gewürfelten Zahlen mindestens ein Mal die 2 vorkommen.
Da die 0 und die 2 höchstens zweimal vorkommen, muss unter den fünf gewürfelten Zahlen auch mindestens ein Mal die 1 vorkommen. Da schließlich die 1 und die 2 höchstens zweimal vorkommen, muss unter den fünf gewürfelten Zahlen auch mindestens ein Mal die 0 vorkommen.
Folglich muss jede der Zahlen 0, 1 und 2 mindestens einmal unter den fünf Zahlen vertreten sein. Wir können daher die Summe $0 + 1 + 2 = 3$ bilden, die durch 3 teilbar ist.
Die 1. Behauptung ist also in beiden Situationen bewiesen.

2. Behauptung: *Bei weniger als 5 Würfen kann es vorkommen, dass unter den gewürfelten Zahlen keine drei sind, deren Summe durch 3 teilbar ist.*

Beweis der 2. Behauptung:
Angenommen David hat die vier Zahlen 1, 1, 2, 2 gewürfelt.
Die möglichen Summen von drei der vier Zahlen sind $1 + 1 + 2 = 4$ oder $1 + 2 + 2 = 5$.
Alle möglichen Summen sind also nicht durch 3 teilbar.

2. Beweisvorschlag:

Es kommt nicht auf die Reihenfolge der gewürfelten Zahlen an: Für die Teilbarkeit durch 3 ist es ja unerheblich, ob die Augenzahlen 2,1,0,1 (in dieser Reihenfolge) oder 0,1,1,2 gewürfelt wurden. Wir nehmen also an, dass David seine Zahlen in aufsteigender Reihenfolge würfelt.



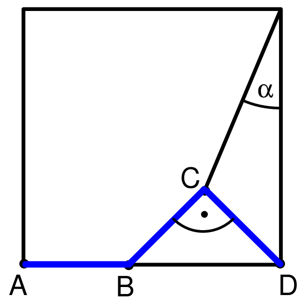
Der obige Baum enthält alle möglichen aufsteigenden Würfelergebnisse von David. Sobald in einem Ast drei Zahlen mit durch 3 teilbarer Summe vorliegen, wird der Ast mit dieser Summe beendet.

Man erkennt, dass alle Äste spätestens nach fünfmaligem Würfeln beendet sind, während es Äste gibt, die nach viermaligem Würfeln noch nicht beendet sind. Das ist genau die behauptete Lösung.

Aufgabe 2

In dem nebenstehenden Quadrat gilt:
$\overline{AB} = \overline{BC} = \overline{CD}$ *und* $\sphericalangle BCD = 90°$.

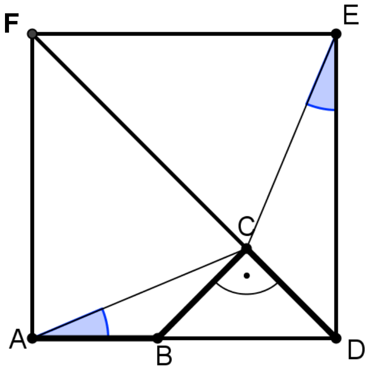
Bestimme die Größe des Winkels α.



Lösung:

Es gilt α = ***22,5*** °.

1. Beweisvorschlag:



Das Dreieck BDC ist gleichschenklig, da $\overline{BC} = \overline{CD}$.
Nach Voraussetzung ist $\sphericalangle BCD = 90°$. Für die Weite des Basiswinkels $\sphericalangle CDB$ folgt deshalb aus dem Winkelsummensatz für Dreiecke:
$\sphericalangle CDB = \sphericalangle DBC = 45°$. (1)
Der Punkt C liegt somit auf der Diagonalen DF des Quadrates ADEF.
Die Diagonale DF ist eine Symmetrieachse des Quadrates ADEF. Spiegelt man das Quadrat an dieser Symmetrieachse, so ist der Winkel $\sphericalangle DAC$ das Spiegelbild des Winkels $\sphericalangle CED$ und es gilt
$\alpha = \sphericalangle CED = \sphericalangle DAC$.
Der Winkel $\sphericalangle DAC$ ist Basiswinkel im gleichschenkligen Dreieck ABC. Mit dem Winkelsummensatz für Dreiecke folgt:

$$\alpha = \sphericalangle CED = \sphericalangle DAC = \frac{1}{2} \cdot (180° - \sphericalangle CBA) \qquad (2)$$

$\sphericalangle CBA$ ist ein Nebenwinkel des Basiswinkels $\sphericalangle DBC$ im Dreieck BDC. Die Basiswinkel in diesem Dreieck haben nach (1) die Weite 45°. Für $\sphericalangle CBA$ gilt somit:

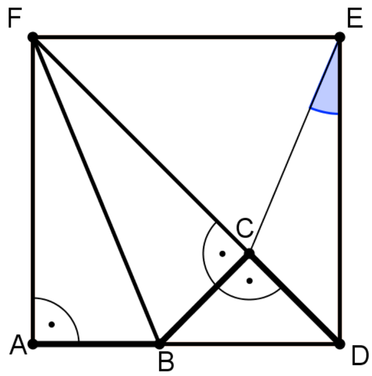
$$\sphericalangle CBA = 180° - \sphericalangle DBC = 180° - 45° = 135°. \qquad (3)$$

Aus (2) und (3) ergibt sich für α:

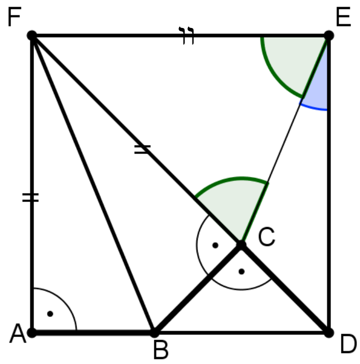
$$\alpha = \sphericalangle CED = \sphericalangle DAC = \frac{1}{2} \cdot (180° - \sphericalangle CBA) = \frac{1}{2} \cdot (180° - 135°) = 22{,}5°.$$

Dies war zu zeigen.

2. Beweisvorschlag:



Das Dreieck BDC ist gleichschenklig, da $\overline{BC} = \overline{CD}$.
Nach Voraussetzung ist $\sphericalangle$ BCD = 90°. Für die Weite des Winkels $\sphericalangle$ CDB folgt deshalb aus dem Winkelsummensatz für Dreiecke: $\sphericalangle$ CDB = 45°.
Der Punkt C liegt somit auf der Diagonale DF des Quadrates ADEF.
$\sphericalangle$ FCB ist ein Nebenwinkel von $\sphericalangle$ BCD und hat deshalb die Weite 180° – 90° = 90°.
Die beiden Dreiecke ABF und BCF sind nach dem Kongruenzsatz Ssw kongruent ($\overline{AB} = \overline{BC}$ nach Voraussetzung, BF ist gemeinsame Seite beider Dreiecke, $\sphericalangle$ BAF = $\sphericalangle$ FCB = 90°). Sie stimmen deshalb auch in anderen einander entsprechenden Größen überein.



Insbesondere gilt: $\overline{AF} = \overline{FC}$.
Da alle Quadratseiten gleich lang sind, folgt daraus:
$\overline{FE} = \overline{AF} = \overline{FC}$.
Somit ist das Dreieck FCE gleichschenklig.
Da DF Diagonale des Quadrates ADEF ist, gilt für den Winkel $\sphericalangle$ CFE im gleichschenkligen Dreieck FCE:
$\sphericalangle$ CFE = 45°.
Für die Weiten der Basiswinkel in diesem gleichschenkligen Dreieck FCE gilt:
$\sphericalangle$ ECF = $\sphericalangle$ FEC = $\frac{1}{2} \cdot (180° - 45°) = 67{,}5°$.
Damit ergibt sich für den gesuchten Winkel α:
α = $\sphericalangle$ CED = 90° – $\sphericalangle$ FEC = 22,5°.

Aufgabe 3

Florian addiert zuerst sieben aufeinander folgende, danach acht aufeinander folgende und schließlich neun aufeinander folgende positive ganze Zahlen. Er erzielt dabei dreimal das gleiche Ergebnis. Christina stellt fest: „Das ist der kleinste Wert, den man so erhalten kann!“

Welchen Wert hat Florian berechnet?

Lösung:

Florian hat den Wert ***252*** berechnet.

1. Beweisvorschlag:

Für eine natürliche Zahl n sei S(n) die Summe der sieben aufeinanderfolgenden Zahlen, die mit n beginnen. Also S(n) = n + (n+1) + (n+2) + (n+3) + (n+4) + (n+5) + (n+6).
So ist z.B. S(9) = 9 + 10 + 11 + 12 + 13 + 14 + 15 = 84.
Ebenso ist A(n) die Summe der acht aufeinanderfolgenden Zahlen, die mit n beginnen und N(n) ist die Summe der neun aufeinanderfolgenden Zahlen, die mit n beginnen.

In folgender Tabelle wurden für die ersten 33 Zahlen die Summen S(n), A(n) und N(n) berechnet.

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17
S(n)	28	35	42	49	56	63	70	77	84	91	98	105	112	119	126	133	140
A(n)	36	44	52	60	68	76	84	92	100	108	116	124	132	140	148	156	164
N(n)	45	54	63	72	81	90	99	108	117	126	135	144	153	162	171	180	189

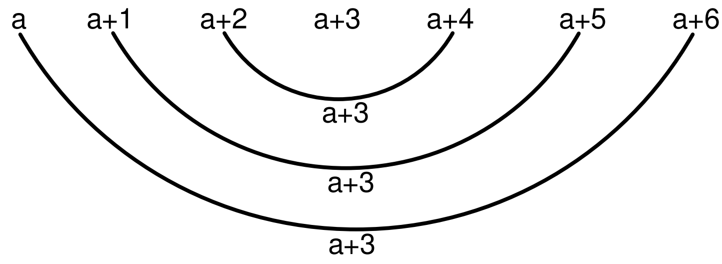
n	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30	31	32	33
S(n)	147	154	161	168	175	182	189	196	203	210	217	224	231	238	245	***252***
A(n)	172	180	188	196	204	212	220	228	236	244	***252***	260	268	276	284	292
N(n)	198	207	216	225	234	243	***252***	261	270	279	288	297	306	315	324	333

Laut Aufgabenstellung ist der kleinste Wert gesucht, der in allen drei Zeilen der Tabelle auftaucht. Durch Vergleich der Zahlen in den drei Zeilen erkennt man, dass 252 die kleinste Zahl ist, die in allen drei Zeilen vorkommt.

Somit hat Florian den Wert **252** berechnet.

2. Beweisvorschlag:

Die sieben aufeinanderfolgenden Zahlen, die bei a beginnen, sind: a, a+1, a+2, a+3, a+4, a+5, a+6. Diese sieben aufeinanderfolgenden Zahlen haben im Durchschnitt den Wert a+3: a ist um 3 kleiner als a+3, a+6 um 3 größer als a+3, so dass der Mittelwert von a und a+6 gerade a+3 ist. Genauso ist der Mittelwert von a+1 und a+5 genau a+3, wie auch der Mittelwert von a+2 und a+4. In der folgenden Abbildung sind die Paare markiert, die durchschnittlich a+3 ergeben.



Wenn der Durchschnitt der sieben Zahlen aber a+3 ist, so ist ihre Summe 7·(a+3):

$$a + (a+1) + \ldots + (a+6) = (a+3)+(a+3)+(a+3)+(a+3)+(a+3)+(a+3)+(a+3)=7\,(a+3). \quad (1)$$

Die acht aufeinanderfolgenden Zahlen, die bei b beginnen sind b, b+1, b+2, b+3, b+4, b+5, b+6, b+7. Genau wie oben kann man hier vier Paare bilden, die jeweils den Durchschnitt b+3,5 haben. Die Summe der acht Zahlen ist also

$$b + (b+1) + \ldots + (b+7) = 8\cdot(b+3{,}5) = 8\cdot b+28 = 4\,(2b+7). \quad (2)$$

Die neun aufeinanderfolgenden Zahlen, die bei c beginnen sind c, c+1, c+2, c+3, c+4, c+5, c+6, c+7, c+8. Man kann sie in vier Paare einteilen, die den Durchschnitt c+4 haben, dazu kommt die mittlere Zahl c+4. Somit gilt für die Summe der neun Zahlen:

$$c + (c+1) + (c+2) + (c+3) + (c+4) + (c+5) + (c+6) + (c+7) + (c+8) = 9\,(c+4). \quad (3)$$

Wenn eine Zahl x sich also als Summe von sieben aufeinanderfolgenden Zahlen darstellen lässt, so ist sie nach (1) durch 7 teilbar. Ist x zugleich auch Summe von acht aufeinanderfolgenden Zahlen, so ist x nach (2) auf jeden Fall durch 4 teilbar. Ist x nun auch Summe von neun aufeinanderfolgenden Zahlen, so ist x nach (3) durch 9 teilbar.
Da die Zahlen 7, 4 und 9 teilerfremd sind, also keine gemeinsamen Teiler haben, muss x nun auch durch das Produkt 7 · 4 · 9 teilbar sein, wenn es durch jede dieser drei Zahlen teilbar ist. Da 7 · 4 · 9 = 252 muss x also durch 252 teilbar sein. Die kleinstmögliche Zahl für den gesuchten Wert x ist also 252.

Nun gilt aber

$$252 = 7\cdot 36 = 33 + 34 + 35 + 36 + 37 + 38 + 39$$
$$252 = 8\cdot 31{,}5 = 28 + 29 + 30 + 31 + 32 + 33 + 34 + 35$$
$$252 = 9\cdot 28 = 24 + 25 + 26 + 27 + 28 + 29 + 30 + 31 + 32$$

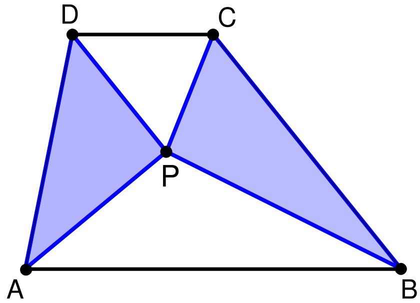
Somit ist 252 tatsächlich eine Zahl, die Summe von sieben, acht bzw. neuen aufeinanderfolgenden Zahlen ist.

Florian hat also den Wert **252** berechnet.

Aufgabe 4

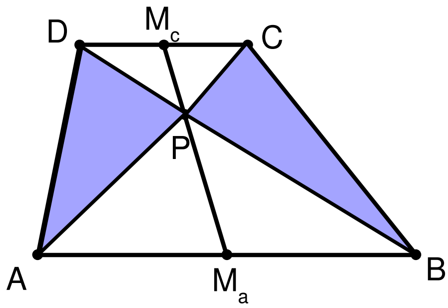
Gegeben ist ein Trapez ABCD mit den parallelen Seiten AB und CD.

Bestimme die Lage aller Punkte P im Inneren dieses Trapezes, für die die Dreiecke APD und CPB den gleichen Flächeninhalt haben.



Lösung:

Genau dann, wenn P auf der Verbindungsstrecke der Mittelpunkte M_a und M_c der Seiten a = AB und c =CD des Trapezes liegt, haben die markierten Dreiecke den gleichen Flächeninhalt.



1. Beweisvorschlag:

Vorüberlegungen:

(*) Da M_a uns M_c die Mittelpunkte der Seiten a und c sind, sind die Grundseiten der Teiltrapeze AM_aM_cD und M_aBCM_c gleich lang. Beide Trapeze haben außerdem dieselbe Höhe (Abstand der Parallelen AB und CD). Daher haben die Teiltrapeze den gleichen Flächeninhalt $A_{TeilTrapez}$. $A_{TeilTrapez}$ ist die Hälfte des Flächeninhalts des Trapezes ABCD.

(**) Die Dreiecke AM_aP und M_aBP stimmen in der Grundseitenlänge $\overline{AM_a}$ und $\overline{M_aB}$ sowie der zugehörigen Höhe überein und haben damit den gleichen Flächeninhalt. Das Gleiche gilt analog für die Dreiecke DPM_c und CM_cP.

1. Behauptung:

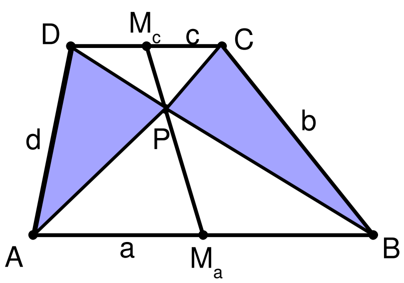
Wenn P auf M_aMc liegt, dann sind die Flächeninhalte der Dreiecke APD und BCP gleich groß.

Beweis der 1. Behauptung:

Aus den Vorüberlegungen (*) und (**) folgt

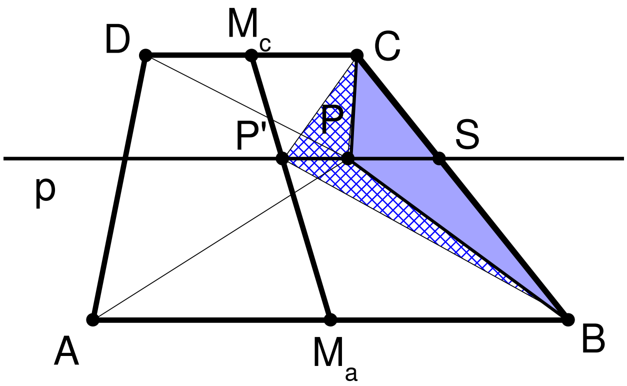
$A_{\Delta\,APD} = A_{TeilTrapez} - A_{\Delta\,AMaP} - A_{\Delta\,DPMc}$

$= A_{TeilTrapez} - A_{\Delta\,MaBP} - A_{\Delta\,CMcP} = A_{\Delta\,BCP}$.



2. Behauptung:
Wenn die Flächeninhalte der Dreiecke APD und BCP gleich groß sind, dann liegt P auf M_aM_c.

Beweis der 2. Behauptung:
Wir führen einen Widerspruchsbeweis und zeigen, dass wenn P nicht auf M_aM_c liegt, die Flächeninhalte der Dreiecke APD und BCP nicht gleich groß sind.



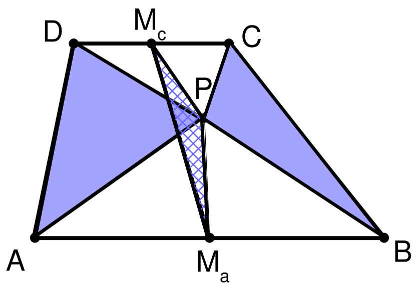
Sei also angenommen der Punkt P liegt im Inneren des Trapezes ABCD, aber nicht auf der Strecke M_aM_c. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit können wir annehmen, dass P im „rechten" Teiltrapez M_aBCM_c liegt.

Die Parallele p zu AB durch P schneidet M_aM_c in P'. Dann liegt P im Inneren des Dreiecks BCP'. Somit ist der Flächeninhalt des Dreiecks BCP kleiner als der Flächeninhalt des Dreiecks BCP'.
Analog ist der Flächeninhalt von APD größer als der Flächeninhalt von AP'D.
Nach der 1. Behauptung sind aber die Flächeninhalte von AP'D und BCP' gleich groß.
Zusammenfassend gilt also:

$$A_{\Delta\,APD} > A_{\Delta\,AP'D} = A_{\Delta\,BCP'} > A_{\Delta\,BCP}.$$

Somit sind die Flächeninhalte der Dreiecke APD und BCP nicht gleich groß und die 2. Behauptung ist bewiesen.

Variante zum Beweis der 2. Behauptung:
Sei P ein Punkt im Trapez mit $A_{\Delta\,APD} = A_{\Delta\,BCP}$. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit können wir annehmen, dass P in der rechten Hälfte des Trapezes liegt, ansonsten schließen wir analog.



Der Flächeninhalt des Fünfecks AM_aPM_cD lässt sich dann auf zwei Arten zerlegen (s. Abb.):

(1) $A_{AMaPMcD} = A_{\Delta\,APD} + A_{\Delta\,AMaP} + A_{\Delta\,DPMc}$ und
(2) $A_{AMaPMcD} = A_{AMaMcD} + A_{MaPMc} = A_{TeilTrapez} + A_{MaPMc}$

Analog gilt für das Fünfeck M_aBCM_cP:

(1*) $A_{MaBCMcP} = A_{\Delta\,BCP} + A_{\Delta\,MaBP} + A_{\Delta\,CMcP}$ und
(2*) $A_{MaBCMcP} = A_{AMaMcD} - A_{MaPMc} = A_{TeilTrapez} - A_{MaPMc}$

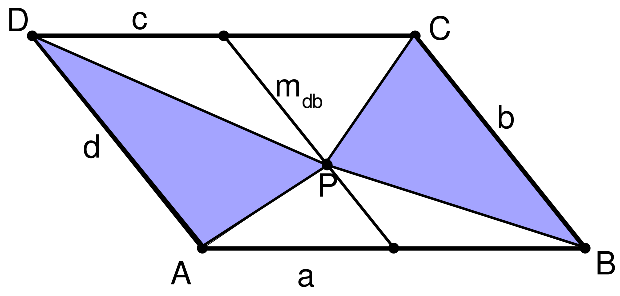
Aus (1) und (2) ergibt sich
(3) $A_{\Delta\,APD} + A_{\Delta\,AMaP} + A_{\Delta\,DPMc} = A_{TeilTrapez} + A_{MaPMc}$,
ebenso folgt aus (1*) und (2*):
(3*) $A_{\Delta\,BCP} + A_{\Delta\,MaBP} + A_{\Delta\,CMcP} = A_{TeilTrapez} - A_{MaPMc}$.

Wegen der Annahme $A_{\Delta\,APD} = A_{\Delta\,BCP}$ und wegen $A_{\Delta\,AMaP} = A_{\Delta\,MaBP}$ bzw. $A_{\Delta\,DPMc} = A_{\Delta\,CMcP}$ (Vorüberlegung (**)) stimmen aber die linken Seiten der Gleichungen (3) und (3*) überein. Folglich müssen auch die rechten Seiten übereinstimmen, d.h.
$A_{TeilTrapez} + A_{MaPMc} = A_{TeilTrapez} - A_{MaPMc}$.
Daraus folgt: $A_{MaPMc} = 0$.
Der Flächeninhalt des Dreiecks M_aPM_c kann aber nur verschwinden, wenn P auf M_aM_c liegt, so dass die 2. Behauptung bewiesen ist.

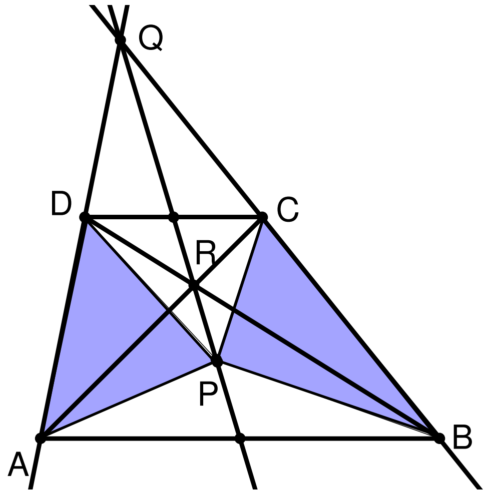
2. Beweisvorschlag:

Variante für die Angabe der Lösungsmenge:

Die Lage der Punkte innerhalb des Trapezes kann auf ganz verschiedene Arten beschrieben werden. Hier eine Variante:



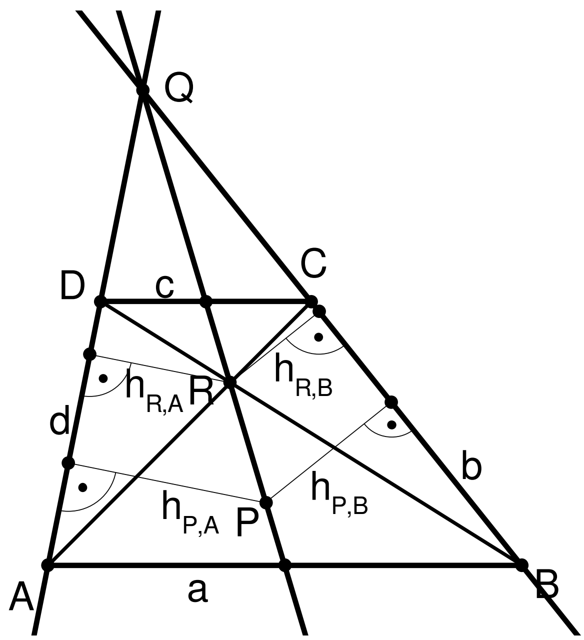
Fall 1: Das Viereck ABCD ist ein Parallelogramm.
Dann haben die markierten Dreiecke genau dann denselben Flächeninhalt, wenn P auf der Mittelparallelen m_{db} zu den Seiten d und b liegt.



Fall 2: Das Viereck ABCD ist kein Parallelogramm.
Dann schneiden sich die Geraden AD und BC im Punkt Q. Sei R der Diagonalenschnittpunkt des Trapezes ABCD.
Die markierten Dreiecke haben genau dann denselben Flächeninhalt, wenn P im Inneren des Trapezes auf der Geraden QR liegt.

Beweis von Fall 1: In diesem Fall ist klar, dass die beiden Dreiecke gleichen Flächeninhalt haben, da hier die beiden Dreiecke gleich lange Grundseiten d = b haben und gleich lange zugehörige Höhen. Umgekehrt wird wie in der 2. Behauptung des 1. Beweisvorschlags bewiesen, dass nur für Punkte P auf der Mittelparallelen m_{db} die Flächeninhalte gleich sind.

Beweis von Fall 2:
Zunächst gilt die Flächengleichheit der Dreiecke APD und BCP für den Diagonalschnittpunkt P = R:
Es ist $A_{\Delta\,ARD} = A_{\Delta\,ABD} - A_{\Delta\,ABR}$ und
$A_{\Delta\,BCR} = A_{\Delta\,ABC} - A_{\Delta\,ABR}$.
Außerdem ist $A_{\Delta\,ABD} = A_{\Delta\,ABC}$, da beide Dreiecke die gleiche Grundseite a und die gleiche zugehörige Höhe haben.
Somit folgt $A_{\Delta\,ARD} = A_{\Delta\,BCR}$.
Insbesondere folgt nun aus dieser Flächengleichheit
$\frac{d \cdot h_{R,A}}{2} = \frac{b \cdot h_{R,B}}{2}$ bzw. $\frac{h_{R,A}}{h_{R,B}} = \frac{b}{d}$ (#).
Wir zeigen nun, dass für jeden anderen Punkt P auf QR ebenfalls die Flächengleichheit $A_{\Delta\,APD} = A_{\Delta\,BCP}$ gilt.



Nach dem Strahlensatz gilt für die jeweils parallelen Höhen: $\frac{h_{P,A}}{h_{R,A}} = \frac{h_{P,B}}{h_{R,B}}$ oder umgeschrieben $\frac{h_{P,A}}{h_{P,B}} = \frac{h_{R,A}}{h_{R,B}}$. Aus (#) ergibt sich damit $\frac{h_{R,A}}{h_{R,B}} = \frac{b}{d} = \frac{h_{P,A}}{h_{P,B}}$.

Daraus folgt $\frac{d \cdot h_{P,A}}{2} = \frac{b \cdot h_{P,B}}{2}$, d.h. genau die Flächengleichheit $A_{\Delta\,APD} = A_{\Delta\,BCP}$.

Umgekehrt wird wie in der 2. Behauptung des 1. Beweisvorschlags durch Widerspruch bewiesen, dass nur für Punkte P auf der Mittelparallelen (Fall 1) bzw. auf der Geraden QR (Fall2) die Flächengleichheit $A_{\Delta\,APD} = A_{\Delta\,BCP}$ gilt.

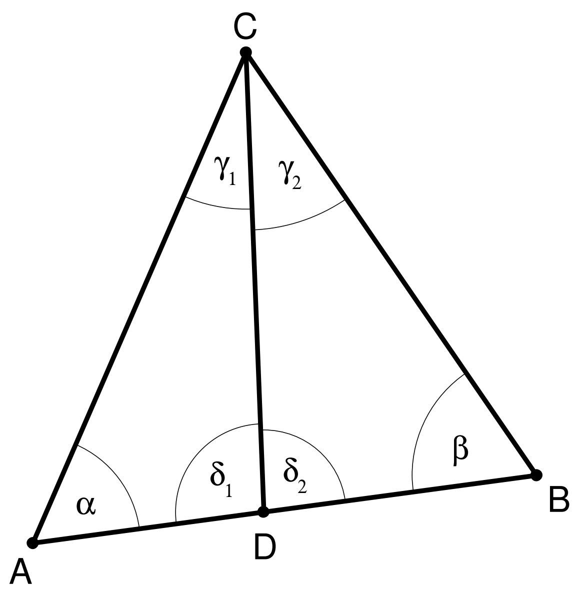
Aufgabe 5

Ein gerader Schnitt zerlegt ein Dreieck ABC in zwei Teildreiecke, die zueinander ähnlich, aber nicht kongruent sind.
Zeige: Das Dreieck ABC ist rechtwinklig.

Hinweis: Zwei Dreiecke heißen zueinander ähnlich, wenn sie in ihren Innenwinkeln übereinstimmen.

Beweisvorschlag:

Nachdem der Schnitt ausgeführt wurde liegen zwei Dreiecke vor, also musste der Schnitt durch einen Eckpunkt gegangen sein, weil ansonsten ein Viereck zustande gekommen wäre.
Wir können also ohne Beschränkung der Allgemeinheit annehmen, dass der Schnitt durch den Eckpunkt C führt. In der folgenden Abbildung ist die entstehende Situation dargestellt. Der Schnitt wurde entlang der Strecke CD ausgeführt.



Nach Aufgabenstellung ist Dreieck ADC ähnlich zu Dreieck DBC. Der Innenwinkel δ_1 von ADC muss also mit einem der drei Innenwinkel von DBC übereinstimmen. Für δ_1 gibt es drei Möglichkeiten:

1. Fall: $\delta_1 = \delta_2$,
2. Fall: $\delta_1 = \beta$ oder
3. Fall: $\delta_1 = \gamma_2$.

1. Fall: $\delta_1 = \delta_2$

Da $\delta_1 + \delta_2 = 180°$ folgt nun $\delta_1 = \delta_2 = 90°$. Der Innenwinkel γ_1 von ADC muss mit einem der beiden verbleibenden Innenwinkel von DBC, also mit γ_2 oder β übereinstimmen.

1. Unterfall: $\gamma_1 = \gamma_2$

Dann haben die Dreiecke ADC und DBC zwei gleiche Winkel und eine gemeinsame Seite CD. Nach dem Kongruenzsatz WSW sind die Dreiecke ADC und DBC also kongruent. Nach Aufgabenstellung sollen die Teildreiecke aber nicht kongruent sein, es ergibt sich in diesem Unterfall also ein Widerspruch.

2. Unterfall: $\gamma_1 = \beta$

Aus dem Winkelsummensatz für die beiden Teildreiecke folgt auch $\alpha = \gamma_2$.

Aus $\delta_1 = 90°$ folgt mit dem Winkelsummensatz für das Dreieck ADC: $\gamma_1 = 90° - \alpha$.

Folglich ist $\gamma = \gamma_1 + \gamma_2 = (90° - \alpha) + \alpha = 90°$.

Das Dreieck ABC ist also tatsächlich rechtwinklig.

2. Fall: $\delta_1 = \beta$

Dann wären die Strecken DC und BC parallel, denn δ_1 und β sind gleiche Stufenwinkel. Das Dreieck DBC kann aber nicht zwei parallele Seiten haben. Somit liegt ein Widerspruch vor.

3. Fall: $\delta_1 = \gamma_2$

Dann wären die Strecken CB und AD parallel, denn δ_1 und γ_2 sind gleiche Wechselwinkel. Damit wären auch CB und BD parallel. Das Dreieck DBC kann aber nicht zwei parallele Seiten haben. Somit liegt ein Widerspruch vor.

Von allen möglichen Fällen ist nur derjenige verblieben, in dem $\gamma = 90°$ war, das Dreieck ABC muss also rechtwinklig sein.

Aufgabe 6

Bestimme alle natürlichen Zahlen a und b, für die $\frac{1}{a}+\frac{a}{b}+\frac{1}{ab}=1$ gilt.

Lösung:

Es gibt zwei Zahlenpaare (a;b), die Lösungen der Gleichung sind, nämlich (3;5) und (2;5).

1. Beweisvorschlag:

Sowohl a als auch b dürfen nicht 0 sein, da für 0 der Term der linken Seite der Gleichung nicht definiert ist.

Multipliziert man beide Seiten der gegebenen Gleichung mit ab, so erhält man

$$b + a^2 + 1 = ab \quad \text{bzw.} \quad ab - b = a^2 + 1 \quad \text{bzw.} \quad b\,(a-1) = a^2 + 1$$

Für a = 1 ist die linke Seite der letzten Gleichung 0, die rechte Seite ist 2, also ergibt sich ein Widerspruch. Folglich muss a ≠ 1 gelten.

Für a ≠ 1 kann man beide Seiten der Gleichung b (a – 1) = a² + 1 durch a – 1 dividieren. Dann ergibt sich

$$b=\frac{a^2+1}{a-1}=\frac{a^2-1+1+1}{a-1}=\frac{(a-1)\cdot(a+1)+2}{a-1}=a+1+\frac{2}{a-1}.$$

Da b eine natürliche Zahl ist, muss $\frac{2}{a-1}$ ebenfalls eine natürliche Zahl sein. Also muss a – 1 ein Teiler von 2 sein. Es kann also a – 1 nur 1 oder 2 sein.

1. Möglichkeit: a – 1 = 2.

Dann ist a = 3 und $b=\frac{a^2+1}{a-1}=\frac{3^2+1}{3-1}$, also b = 5.

2. Möglichkeit: a – 1 = 1.

Dann ist a = 2 und $b=\frac{a^2+1}{a-1}=\frac{2^2+1}{2-1}$, also b = 5.

Somit kommen für (a;b) nur die beiden Lösungen (3;5) und (2;5) in Frage.
Durch Einsetzen in die in der Aufgabe gegebene Gleichung $\frac{1}{a}+\frac{a}{b}+\frac{1}{ab}=1$ ergibt sich, dass sowohl (3;5) als auch (2;5) Lösungen der Aufgabe sind.

Variante zum 1. Beweisvorschlag:

Wie im 1. Beweisvorschlag erhält man a ≠ 1 und $b=\frac{a^2+1}{a-1}$.

Man untersucht also den Term $\frac{a^2+1}{a-1}$ für wachsende a > 1. Dies geschieht in der folgenden Tabelle:

a	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$\frac{a^2+1}{a-1}$	5	5	$5\frac{2}{3}$	6,5	7,4	$8\frac{1}{3}$	$9\frac{2}{7}$	10,25	$11\frac{2}{9}$

Es fällt auf, dass der Abstand des Terms $\frac{a^2+1}{a-1}$ zu a + 1 für wachsendes a kontinuierlich kleiner wird. Dies kann man auch rechnerisch überprüfen:

$\frac{a^2+1}{a-1}-(a+1)=\frac{a^2+1}{a-1}-\frac{(a+1)(a-1)}{a-1}=\frac{(a^2+1)-(a^2-1)}{a-1}=\frac{2}{a-1}$.

Der Ausdruck $\frac{2}{a-1}$ wird immer kleiner für wachsendes a, es nähert sich also $\frac{a^2+1}{a-1}$ an a + 1 an.

Für a > 3 ist hierbei $\frac{a^2+1}{a-1}$ < a +2, also liegt $\frac{a^2+1}{a-1}$ zwischen den natürlichen Zahlen a + 1 und a + 2. Somit kann für a > 3 der Term $\frac{a^2+1}{a-1}$ keine natürliche Zahl sein, so dass nur noch a = 2 bzw. a = 3 übrig bleibt. Daraus ergeben sich die oben angegebenen Lösungen.

2. Beweisvorschlag:

Sowohl a als auch b dürfen nicht 0 sein, da für 0 der Term der linken Seite der Gleichung nicht definiert ist.
Multipliziert man beide Seiten der gegebenen Gleichung mit ab, so erhält man

$$b + a^2 + 1 = ab \quad \text{bzw.} \quad a^2 - ab + (b + 1) = 0.$$

Letztere Gleichung ist eine quadratische Gleichung in a. In Abhängigkeit von b ergeben sich die Lösungen $a_{1,2}=\frac{b\pm\sqrt{b^2-4(b+1)}}{2}=\frac{b\pm\sqrt{b^2-4b-4}}{2}$.

Die Diskriminante $b^2-4b-4=(b-2)^2-8$ muss eine Quadratzahl sein, wenn die Lösung a eine natürliche Zahl ergeben soll, also $(b-2)^2-8=x^2$, für eine natürliche Zahl x ≥ 1.

Daraus ergibt sich $(b-2)^2-x^2=(b-2-x)(b-2+x)=8$.

Man hat also 8 als Produkt von zwei ganzen Zahlen $b-2-x$ und $b-2+x$ dargestellt.
Die Differenz dieser beiden Zahlen ist $(b-2+x)-(b-2-x)=2x$, also gerade.
Da b und x beide positiv sind, muss $b-2+x\geq 0$ gelten, also müssen die beiden Faktoren $b-2-x$ und $b-2+x$ positiv sein.
Aufgrund der möglichen Faktorisierungen von 8 als Produkt von zwei Zahlen ergibt sich daraus, dass die beiden Faktoren 4 und 2 sind.
Somit gilt $b-2-x=2$ und $b-2+x=4$. Daraus folgt $x=1$ und b = 5.

Also ist nur im Fall b = 5 die Diskriminante b^2-4b-4 eine Quadratzahl, nämlich 1.

Für b = 5 ergibt sich $a_{1,2}=\frac{5\pm 1}{2}$, also $a_1 = 2$ und $a_2 = 3$.

Wir erhalten also die beiden Lösungspaare (3;5) und (2;5) für (a;b). Durch Einsetzen in die in der Aufgabe gegebene Gleichung $\frac{1}{a}+\frac{a}{b}+\frac{1}{ab}=1$ ergibt sich, dass sowohl (3;5) als auch (2;5) Lösungen der Aufgabe sind.