Landeswettbewerb Mathematik
Baden-Württemberg
Musterlösungen 2. Runde 2013/2014

Aufgabe 1

Eine Zahlenfolge beginnt mit den positiven Zahlen a und b. Die weiteren Zahlen werden gebildet, indem man abwechselnd die Summe und den Quotienten der beiden Vorgänger bestimmt. Der Quotient wird dabei berechnet, indem der Vorgänger durch den Vorvorgänger dividiert wird. So erhält man zum Beispiel für a = 8 und b = 2 die Zahlenfolge 8, 2, 10, 5, 15, 3, 18, 6,…
Bestimme alle Startzahlen a und b, bei denen die Zahl 2013 die 2014te Zahl der Folge ist.

Lösung:

Damit die 2014te Zahl der Folge die Zahl 2013 ist, muss die Startzahl b = 1510 sein, a darf jede beliebige positive Zahl sein.

1. Beweisvorschlag (Betrachten einer Teilfolge):

Da Summen und Quotienten positiver Zahlen stets selbst wieder positive Zahlen sind, kann es bei der Berechnung der Folgenglieder nie zu einer Division durch 0 kommen, so dass für alle positiven Startzahlen a und b die Folge beliebig weit, also insbesondere auch bis zum 2014ten Folgenglied, fortgesetzt werden kann.
Wir bezeichnen die Folgenglieder der Reihe nach mit $x_1, x_2, x_3, \ldots$.
Für eine natürliche Zahl n ist x_n also die n-te Zahl der Folge.
Gesucht sind alle Startzahlen a und b mit $x_{2014} = 2013$.
Nach Aufgabenstellung ist:

(1) $x_1 = a$ und $x_2 = b$;

(2) für ungerade natürliche Zahlen $n > 1$ ist $x_n = x_{n-1} + x_{n-2}$;

(3) für gerade natürliche Zahlen $n > 2$ ist $x_n = \frac{x_{n-1}}{x_{n-2}}$.

Damit ergibt sich für die ersten Folgenglieder:

- $x_3 = x_2 + x_1$
- $x_4 = \frac{x_3}{x_2}$

- $x_5 = x_4 + x_3$
- $x_6 = \frac{x_5}{x_4} = \frac{x_3 + x_4}{x_4} = \frac{x_3}{x_4} + 1 = \frac{x_3}{\frac{x_3}{x_2}} + 1 = x_2 + 1$
- $x_7 = x_6 + x_5$
- $x_8 = \frac{x_7}{x_6} = \frac{x_5 + x_6}{x_6} = \frac{x_5}{x_6} + 1 = \frac{x_5}{\frac{x_5}{x_4}} + 1 = x_4 + 1$

Es fällt auf, dass bei den geraden Folgengliedern sich die Folgeglieder nach vier Schritten um 1 erhöhen. Man vermutet also für alle geraden Zahlen $n \geq 2$ die Beziehung $x_{n+4} = x_n + 1$.

Dies beweisen wir durch direktes Nachrechnen, wobei wir benutzen, dass für gerades n auch n+4 und n+2 gerade sind und n+3 ungerade ist. Somit

$$x_{n+4} = \frac{x_{n+3}}{x_{n+2}} = \frac{x_{n+1} + x_{n+2}}{x_{n+2}} = \frac{x_{n+1}}{x_{n+2}} + 1 = \frac{x_{n+1}}{\frac{x_{n+1}}{x_n}} + 1 = x_n + 1.$$

Hieraus folgt nun $x_{2014} = x_{2010} + 1 = x_{2006} + 2 = x_{2002} + 3 = ... = x_2 + 503$, denn $2014 - 2 = 2012 = 4 \cdot 503$.

Somit ergibt sich $x_{2014} = b + 503$. Also ist $x_{2014} = b + 503 = 2013$ genau dann der Fall, wenn $b = 2013 - 503 = 1510$ ist. Da x_{2014} gar nicht von a abhängt, ergibt sich $x_{2014} = 2013$ genau dann, wenn $a > 0$ beliebig ist und wenn $b = 1510$ ist.

2. Beweisvorschlag (Beweis durch explizite Angabe der Folgenglieder):

Wie im ersten Beweis bezeichnen wir die Folgenglieder der Reihe nach mit $x_1, x_2, x_3, \ldots$

Wie zeigen, dass die Folgenglieder für alle $k \geq 0$ in Viererblocks die folgende Gestalt haben:

$$x_{4k+1} = \left(\frac{a}{b} + k\right) \cdot (b + k)$$
$$x_{4k+2} = b + k$$
$$x_{4k+3} = \left(\frac{a}{b} + k + 1\right) \cdot (b + k)$$
$$x_{4k+4} = \frac{a}{b} + k + 1$$

Für den ersten Viererblock ($k = 0$) ergibt sich dies durch direktes Nachrechnen:

$$x_1 = a = \left(\frac{a}{b} + 0\right) \cdot (b + 0)$$
$$x_2 = b = b + 0$$
$$x_3 = a + b = \left(\frac{a}{b} + 0 + 1\right) \cdot (b + 0)$$
$$x_4 = \frac{a + b}{b} = \frac{a}{b} + 0 + 1$$

Gelten die vier Formeln nun für den k-ten Vishererblock, so gelten sie auch für den nächsten Viererblock, also für k+1:

$$x_{4(k+1)+1} = x_{4k+5} = x_{4k+4} + x_{4k+3} = \left(\frac{a}{b}+k+1\right) + \left(\frac{a}{b}+k+1\right)\cdot(b+k) = \left(\frac{a}{b}+k+1\right)\cdot(b+k+1)$$

$$x_{4(k+1)+2} = x_{4k+6} = \frac{x_{4k+5}}{x_{4k+4}} = \frac{\left(\frac{a}{b}+k+1\right)\cdot(b+k+1)}{\frac{a}{b}+k+1} = b+k+1$$

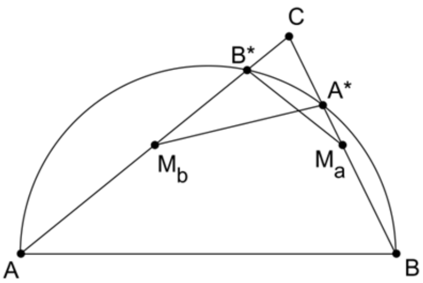
$$x_{4(k+1)+3} = x_{4k+7} = x_{4k+6} + x_{4k+5} = (b+k+1) + \left(\frac{a}{b}+k+1\right)\cdot(b+k+1) = \left(\frac{a}{b}+k+2\right)\cdot(b+k+1)$$

$$x_{4(k+1)+4} = x_{4k+8} = \frac{x_{4k+7}}{x_{4k+6}} = \frac{\left(\frac{a}{b}+k+2\right)\cdot(b+k+1)}{b+k+1} = \frac{a}{b}+k+2$$

Somit bleibt die Gültigkeit von einem Vishererblock zum nächsten erhalten und daher gelten die vier Formeln für alle Vishererblocks.
Da $x_{2014} = x_{4\cdot 503+2}$ ergibt sich nach der zweiten der vier Formeln $x_{2014} = x_{4\cdot 503+2} = b+503$.
Die Bedingung $x_{2014} = 2013$ ist also genau dann erfüllt, wenn $b = 2013 - 503 = 1510$ ist.
Der Wert von a kann dabei jede beliebige positive Zahl sein.

Aufgabe 2

Im abgebildeten Dreieck ABC sind M_a und M_b Seitenmittelpunkte.
Das Dreieck wurde dabei so gewählt, dass der Halbkreis über der Strecke AB die anderen Seiten zwischen M_a und C sowie zwischen M_b und C in den Punkten A bzw. B* schneidet.*
Bestimme in diesem Dreieck den Schnittwinkel der Geraden M_bA^* und M_aB^* in Abhängigkeit von den Innenwinkeln des Dreiecks ABC.

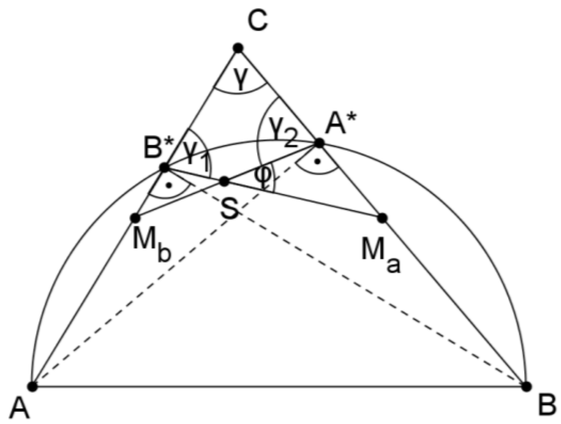


Lösung:

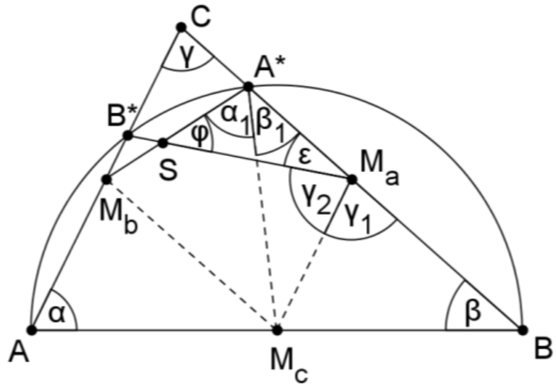
Bezeichnet man die Innenwinkel des Dreiecks ABC wie üblich mit α, β und γ, dann gilt für den gesuchten Schnittwinkel φ: $\varphi = 2\gamma - \alpha - \beta = 3\gamma - 180°$.

1. Beweisvorschlag (Mit Satz des Thales):

Nach Satz des Thales ist das Dreieck ABA* rechtwinklig mit rechtem Winkel bei A*. Deswegen ist auch das Dreieck CAA* rechtwinklig mit rechtem Winkel bei A*. Da der Punkt M_b Mittelpunkt der Hypotenuse AC dieses Dreiecks ist, ist er gleichzeitig nach der Umkehrung des Satzes des Thales auch Mittelpunkt des Umkreises des Dreiecks CAA*.



Also sind die Strecken M_bC und M_bA^* als Radien dieses Umkreises gleich lang. Das Dreieck A^*CM_b ist somit gleichschenklig mit Basis A^*C. Daraus folgt mit den Winkelbezeichnungen der Skizze $\gamma_2 = \gamma$.
In analoger Weise folgt die Gleichschenkligkeit des Dreiecks CB^*M_a und damit $\gamma_1 = \gamma$.
Im Viereck SA*CB* haben also drei der vier Innenwinkel die Weite γ. Aus dem Winkelsummensatz folgt
$\sphericalangle A^*SB^* = 360° - 3\gamma$.
Dies ist einer der beiden Winkel, den die beiden Geraden M_bA^* und M_aB^* miteinander einschließen.

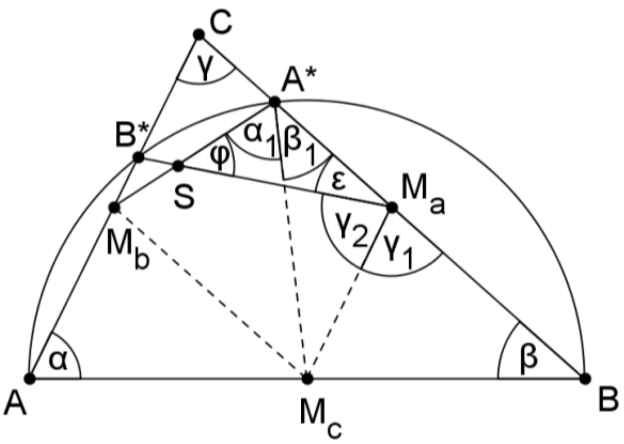


Weil C außerhalb des Thaleskreises über AB liegt, ist $\gamma < 90°$ und deswegen ist $\sphericalangle A^*SB^* = 360° - 3\gamma > 360° - 3 \cdot 90° = 90°$. Das bedeutet, dass tatsächlich der einge-

zeichnete Winkel φ als Nebenwinkel von $\sphericalangle A^*SB^*$ kleiner als 90° ist. Somit ist φ der Schnittwinkel der beiden Geraden M_bA^* und M_aB^*.
Es folgt $\varphi = 180° - \sphericalangle A^*SB^* = 180° - (360° - 3\gamma) = 3\gamma - 180°$.

2. Beweisvorschlag (Mit einer Spiegelung und gleichschenkligen Dreiecken):

Wir führen den Beweis in sechs Schritten:



1. M_c sei der Mittelpunkt der Seite AB, M_c ist also der Mittelpunkt des gegebenen Halbkreises. Sowohl B als auch A* liegen auf dem Halbkreis. Daher ist das Dreieck M_cBA^* gleichschenklig und hat gleich große Basiswinkel, somit $\beta_1 = \beta$.

2. Man erhält den Punkt A*, wenn man den Punkt A an der Geraden M_cM_b spiegelt, denn:
a) Der Bildpunkt A´ von A bei dieser Spiegelung liegt auf dem Kreis um M_c, da die Spiegelachse durch den Kreismittelpunkt verläuft und daher den Kreis auf sich abbildet;
b) der Bildpunkt A´ liegt auch auf der Geraden BC, denn diese Gerade hat von der Spiegelachse M_cM_b den gleichen Abstand wie der Punkt A, da M_cM_b die Mittelparallele im Dreieck ABC ist.
Also ist A´ einer der Schnittpunkte des Kreises mit der Geraden BC. Offenbar kann es sich nicht um den Punkt B handeln, also muss es A* sein.

3. Da A* der Bildpunkt von A bei der Spiegelung an M_cM_b ist, folgt $\alpha_1 = \alpha$.

4. Da M_cM_a als Mittelparallele parallel zu AC ist, sind die Stufenwinkel γ und γ_1 gleich weit.

5. Analog zu 2. lässt sich zeigen, dass B* der Bildpunkt von B bei der Spiegelung an M_cM_a ist. Also ist $\gamma_2 = \gamma_1 = \gamma$ (nach 4.) und somit $\varepsilon = 180° - 2\gamma$.

6. Nun betrachten wir die Winkel im Dreieck SM_aA^*. Nach dem Winkelsummensatz ist $\varphi + \varepsilon + \beta_1 + \alpha_1 = 180°$. Setzt man hier $\varepsilon = 180° - 2\gamma$, $\beta_1 = \beta$ und $\alpha_1 = \alpha$ ein, so folgt $\varphi = 2\gamma - \alpha - \beta$. Da $\alpha + \beta + \gamma = 180°$ folgt $\varphi = 2\gamma - \alpha - \beta = 3\gamma - (\alpha + \beta + \gamma) = 3\gamma - 180°$.
Weil C außerhalb des Thaleskreises über AB liegt, ist $\gamma < 90°$ und damit $\varphi = 3\gamma - 180° < 3 \cdot 90° - 180° = 90°$. Somit ist φ der Schnittwinkel der beiden Geraden.

Aufgabe 3

Sechs Kinder sitzen um einen Tisch. Jedes Kind hat eine gerade Anzahl an Bonbons. Auf Kommando gibt jedes Kind die Hälfte seiner Bonbons an seinen rechten Nachbarn ab; besitzt ein Kind danach eine ungerade Anzahl an Bonbons, nimmt es sich ein Bonbon aus dem unbegrenzten Vorrat.
Die Kinder wollen diesen Vorgang solange wiederholen, bis alle gleich viele Bonbons besitzen.
Ist dies immer möglich?

Lösung:

Es ist immer möglich, diesen Vorgang solange zu wiederholen, bis alle Kinder gleich viele Bonbons besitzen.

Beweisvorschlag:

Sei A_{max} die maximale Anzahl an Bonbons, die ein Kind zu Beginn hat. Zu Beginn haben also alle Kinder höchstens A_{max} Bonbons. Nach Aufgabenstellung ist A_{max} gerade.

Behauptung 1: Auch nach beliebig vielen Vorgängen der beschriebenen Art hat kein Kind mehr als A_{max} Bonbons.

Beweis der Behauptung 1: Angenommen ein Kind K hat zu einem beliebigen Zeitpunkt $a \leq A_{max}$ Bonbons, sein linker Nachbar L hat $b \leq A_{max}$ Bonbons. Nach Aufgabenstellung sind die Anzahlen a und b gerade, sonst hätten die Kinder zuvor ein Bonbon aus dem Vorrat nachgezogen.
Beim nächsten Vorgang gibt K $\frac{a}{2}$ Bonbons an seinen rechten Nachbarn ab. Zugleich erhält K von L $\frac{b}{2}$ Bonbons. Somit hat das Kind K nach dem Vorgang $\frac{a}{2}+\frac{b}{2}=\frac{a+b}{2}$ Bonbons. Falls $\frac{a+b}{2}$ ungerade ist, muss K noch ein Bonbon aus dem Vorrat nachziehen.

<u>*Fall 1:*</u> K und L hatten vor dem beschriebenen Vorgang genau A_{max} Bonbons, es ist also $a = b = A_{max}$.
Dann hat K nach dem Kommando zunächst $\frac{a+b}{2} = A_{max}$ Bonbons. Da A_{max} gerade ist, muss K nicht nachziehen und K hat weiterhin A_{max} Bonbons.

<u>*Fall 2:*</u> K oder L hatten vor dem beschriebenen Vorgang weniger als A_{max} Bonbons. Dann ist a oder b kleiner als A_{max}. Da a und b gerade sind, ist a oder b sogar kleinergleich $A_{max} - 2$, denn $A_{max} - 1$ wäre ungerade. Somit ist
$a + b \leq A_{max} + A_{max} - 2 = 2A_{max} - 2$.

Also hat K nach dem Kommando zunächst $\frac{a+b}{2} \leq \frac{2A_{max}-2}{2} = A_{max} - 1$ Bonbons. Selbst wenn $\frac{a+b}{2}$ ungerade ist und K noch ein Bonbon aus dem Vorrat nachziehen muss, so hat K doch am Ende des Vorgangs höchstens $\frac{a+b}{2} + 1 \leq A_{max}$ Bonbons.

In beiden Fällen hat also K weiterhin höchstens A_{max} Bonbons. Da wir diese Überlegung für jedes Kind machen können, haben alle Kinder nach jedem Vorgang höchstens A_{max} Bonbons. Somit ist Behauptung 1 bewiesen.

Behauptung 2: Wenn nicht alle Kinder vor einem Vorgang gleich viele Bonbons haben, so verringert sich die Anzahl der Kinder mit kleinster Bonbonanzahl nach dem Vorgang.

Beweis der Behauptung 2: Sei k die kleinste Bonbonanzahl die vor einem Vorgang bei mindestens einem der Kinder vorkommt.
Nach dem Vorgang wird keines der Kinder weniger als k Bonbons haben. Denn wenn ein Kind vorher a Bonbons und sein linker Nachbar b Bonbons hatte ($a,b \geq k$), so hat es auch danach mindestens $\frac{a+b}{2} \geq k$ Bonbons.
Es kann auch kein Kind, das mehr als die kleinste Bonbonzahl k vor dem Vorgang hatte, nach dem Vorgang nur noch k Bonbons haben. Denn wenn das Kind vor dem Vorgang $a > k$ Bonbons hatte, so hat es auch danach mindestens $\frac{a+k}{2} > k$ Bonbons.
Wenn nicht schon alle Kinder gleich viele Bonbons haben, so gibt es unter allen Kindern mit der kleinsten Bonbonanzahl k eines, dessen linker Nachbar mehr, also mindestens k+2 Bonbons hat. Nach dem Vorgang hat dieses Kind dann mindestens $\frac{k}{2} + \frac{k+2}{2} = k+1$ Bonbons. Somit hat sich die Anzahl der Kinder mit k Bonbons um mindestens eines verringert und Behauptung 2 ist bewiesen.

Die Anzahl der Kinder mit kleinster Bonbonzahl k kann sich so lange verringern, bis keines der Kinder mehr k Bonbons hat. Dies ist bei sechs Kindern nach spätestens fünf Vorgängen der Fall. Wenn keines der Kinder mehr k Bonbons hat, so ist die kleinste vorkommende Bonbonzahl um mindestens eins angestiegen, sie ist also echt größer als vorher geworden.
Da die kleinste vorkommende Bonbonzahl k nicht über die maximale Bonbonzahl A_{max} hinauswachsen kann (Behauptung 1), kann k nur endlich oft echt größer werden. Da aber k nach Behauptung 2 nach höchstens fünf Vorgängen echt größer wird, solange noch nicht alle Kinder gleich viele Bonbons haben, muss die Anzahl der Bonbons nach endlich vielen Schritten bei allen Kindern gleich geworden sein. Die Kinder können also so lange spielen, bis alle Kinder gleich viele Bonbons haben.

Aufgabe 4

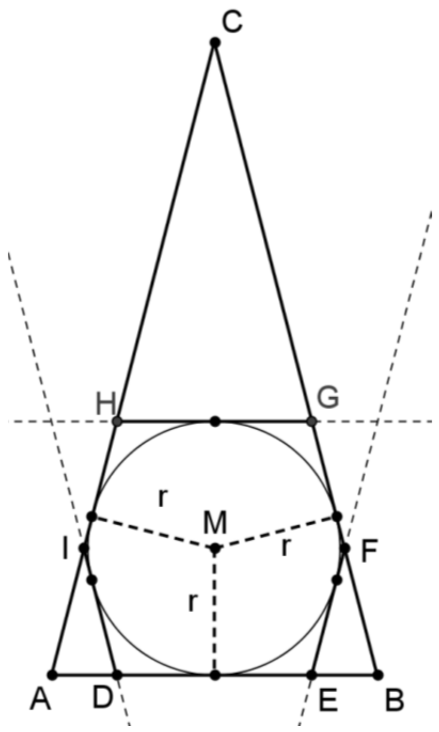
Gegeben ist ein gleichschenkliges Dreieck, in dem jeder Schenkel doppelt so lang wie die Basis ist.
Spiegelt man das Dreieck an seinem Inkreismittelpunkt, so überlappt sich das Spiegelbild mit dem ursprünglichen Dreieck in einem Sechseck.
In welchem Verhältnis stehen die Flächeninhalte dieses Sechsecks und des ursprünglichen Dreiecks?

Lösung:

Das gesuchte Flächenverhältnis ist 14 : 25.

Vorbemerkung:

Die Eckpunkte des Dreiecks werden mit A, B und C bezeichnet, wobei AB die Basis ist. Der Mittelpunkt des Inkreises sei mit M, sein Radius mit r bezeichnet.
Bei einer Punktspiegelung werden Geraden auf parallele Geraden abgebildet. Gerade und Bildgerade haben vom Spiegelpunkt den gleichen Abstand.
Da AB, BC und CA Tangenten an den Inkreis sind, sind demnach auch ihre Bildgeraden Tangenten an den Inkreis, die jeweils den Abstand 2r von der entsprechenden Dreiecksseite haben. Diese Tangenten schneiden von Dreieck ABC drei Dreiecke ab, so dass das genannte Sechseck übrig bleibt. Seine Eckpunkte werden mit D, E, F, G, H und I bezeichnet.

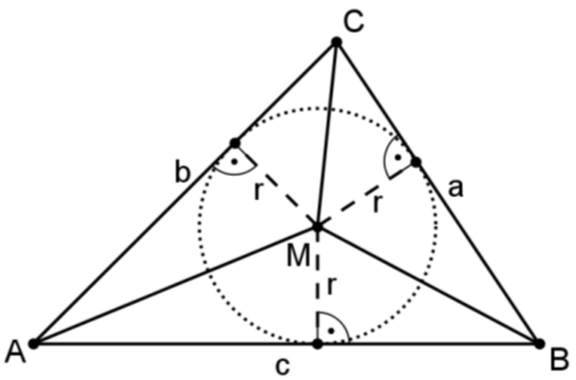


1. Beweisvorschlag (Berechnung der Flächeninhalte der abgeschnittenen Dreiecke):

Wir zeigen zunächst eine Formel, die man auch in einer Formelsammlung findet.

Behauptung: Für jedes Dreieck ABC mit den Seitenlängen a, b und c, den entsprechenden Höhen h_a, h_b bzw. h_c und mit dem Inkreisradius r gilt

$$r = \frac{a \cdot h_a}{a+b+c} = \frac{b \cdot h_b}{a+b+c} = \frac{c \cdot h_c}{a+b+c}.$$



Beweis der Behauptung: Verbinden wir den Inkreismittelpunkt M des Dreiecks mit den drei Ecken, so wird das gesamte Dreieck in drei kleinere Dreiecke zerlegt. Dabei gilt dann für die Flächeninhalte dieser Dreiecke:

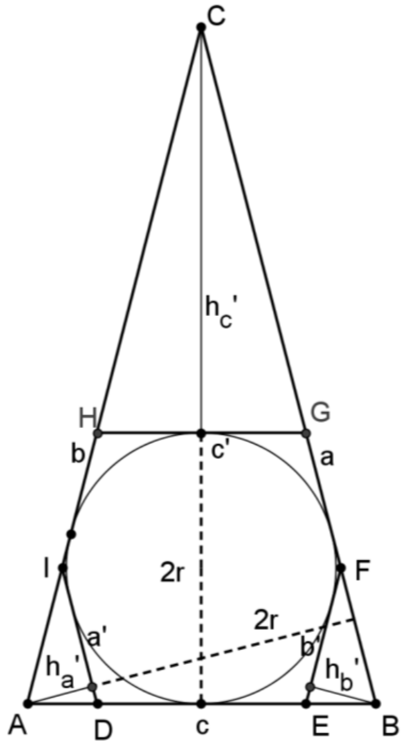
$A_{\Delta BCM} = \frac{1}{2} \cdot a \cdot r$, $A_{\Delta CAM} = \frac{1}{2} \cdot b \cdot r$ und $A_{\Delta ABM} = \frac{1}{2} \cdot c \cdot r$.

Somit gilt also für den Flächeninhalt des Dreiecks ABC:

$$A_{\Delta ABC} = A_{\Delta BCM} + A_{\Delta CAM} + A_{\Delta ABM} = \frac{1}{2} \cdot a \cdot r + \frac{1}{2} \cdot b \cdot r + \frac{1}{2} \cdot c \cdot r = \frac{1}{2} \cdot r \cdot (a+b+c).$$

Andererseits ist $A_{\Delta ABC} = \frac{1}{2} \cdot a \cdot h_a = \frac{1}{2} \cdot b \cdot h_b = \frac{1}{2} \cdot c \cdot h_c$.

Somit erhält man durch Gleichsetzen: $\frac{1}{2} \cdot a \cdot h_a = \frac{1}{2} \cdot r \cdot (a+b+c)$ bzw. $r = \frac{a \cdot h_a}{a+b+c}$. Ebenso ergeben sich die beiden anderen Formeln der Behauptung.



Um das gesuchte Verhältnis nun zu berechnen, bezeichnen wir zunächst die Längen der Höhen auf den Seiten DI, EF bzw. HG in den abgeschnittenen Dreiecken mit h'_a, h'_b bzw. h'_c.

Sind h_a, h_b bzw. h_c die Längen der Höhen im Dreieck ABC, so gilt

$$h'_a = h_a - 2r = h_a - \frac{2 \cdot a \cdot h_a}{a+b+c} = h_a \cdot \left(1 - \frac{2 \cdot a}{a+b+c}\right)$$

und ganz analog

$$h'_b = h_b \cdot \left(1 - \frac{2 \cdot b}{a+b+c}\right) \text{ bzw. } h'_c = h_c \cdot \left(1 - \frac{2 \cdot c}{a+b+c}\right).$$

Da im Dreieck ABC nach Aufgabenstellung

$a = b = 2c$ gilt, folgt $h'_a = h_a \cdot \left(1 - \frac{2 \cdot 2 \cdot c}{2c+2c+c}\right) = \frac{1}{5} h_a$

und analog $h'_b = \frac{1}{5} h_b$.

Schließlich ergibt sich $h'_c = h_c \cdot \left(1 - \frac{2 \cdot c}{2c+2c+c}\right) = \frac{3}{5} h_c$.

Mit dem Strahlensatz folgt hieraus für $a' = \overline{DI}$, $b' = \overline{EF}$ und $c' = \overline{GH}$: $\frac{a'}{a} = \frac{h'_a}{h_a}$, also

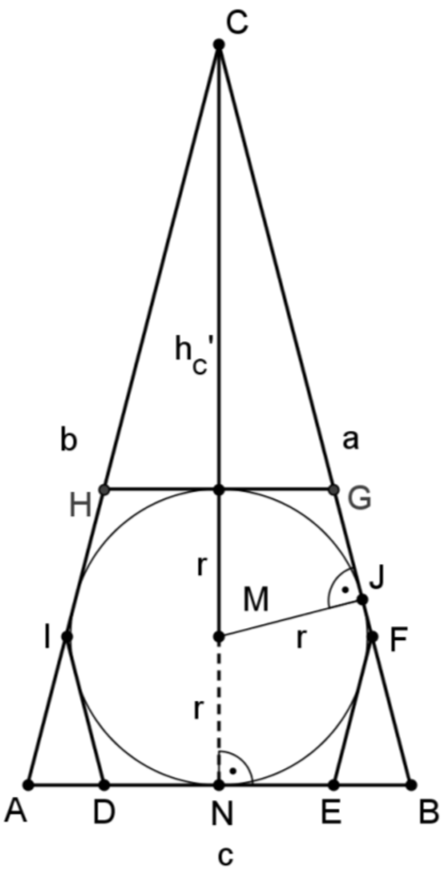
$a' = \frac{1}{5} a$. Analog ergibt sich $b' = \frac{1}{5} b$ und $c' = \frac{3}{5} c$.

Damit lässt sich nun der Flächeninhalt des Sechsecks berechnen:

$$\begin{aligned} A_{Sechseck} &= A_{\Delta ABC} - A_{\Delta ADI} - A_{\Delta EBF} - A_{\Delta HGC} \\ &= A_{\Delta ABC} - \frac{1}{2} a' h'_a - \frac{1}{2} b' h'_b - \frac{1}{2} c' h'_c \\ &= A_{\Delta ABC} - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{5} a \cdot \frac{1}{5} h_a - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{5} b \cdot \frac{1}{5} h_b - \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{5} c \cdot \frac{3}{5} h_c \\ &= A_{\Delta ABC} - \frac{1}{25} A_{\Delta ABC} - \frac{1}{25} A_{\Delta ABC} - \frac{9}{25} A_{\Delta ABC} = \frac{14}{25} A_{\Delta ABC} \end{aligned}$$

Also gilt $A_{Sechseck} : A_{\Delta ABC} = 14 : 25$.

2. Beweisvorschlag (Direkte Berechnung der Sechseckfläche):



Sei h_c die Höhe auf c im Dreieck ABC und h_c' die Höhe auf HG im Dreieck HGC.
Wir bezeichnen mit J bzw. N die Lotfußpunkte von M auf BC bzw. AB. Dann sind die Dreiecke CMJ und CNB ähnlich, denn sie stimmen sowohl im Winkel $\sphericalangle MCJ = \sphericalangle NCB$ bei C als auch im rechten Winkel bei N bzw. J überein.
Dann ergibt sich aus dieser Ähnlichkeit $\frac{\overline{CM}}{\overline{JM}} = \frac{\overline{BC}}{\overline{BN}}$, d.h. $\frac{h_c - r}{r} = \frac{a}{c/2}$. Aus $a = 2c$ folgt nun $\frac{h_c - r}{r} = 4$, also $h_c = 5r$ und

$h_c' = h_c - 2r = 3r = \frac{3}{5}h_c$. Mit dem Strahlensatz folgt daraus $\overline{HG} = \frac{3}{5}c$ und $\overline{HC} = \frac{3}{5}b$. Also $\overline{AH} = \frac{2}{5}b$.

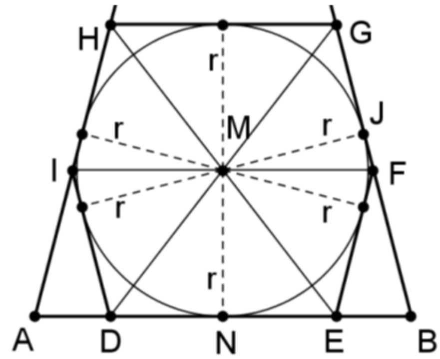
Da das Sechseck DEFGHI nach Konstruktion punktsymmetrisch ist, sind gegenüberliegende Seiten parallel und gleich lang, d.h. $\overline{HG} = \overline{DE}$, $\overline{HI} = \overline{EF}$ und $\overline{GF} = \overline{ID}$.

Das bedeutet, dass auch $\overline{DE} = \frac{3}{5}c$ ist.

Aufgrund der Parallelität von ID und BC ist das Dreieck ADI ähnlich zum Dreieck ABC, also insbesondere gleichschenklig. Deswegen ergibt sich für die anderen Sechsecksei-ten $\overline{HI} + \overline{ID} = \overline{HI} + \overline{IA} = \overline{AH} = \frac{2}{5}b = \frac{4}{5}c$.

Aufgrund der Achsensymmetrie der Figur gilt auch $\overline{EF} + \overline{FG} = \frac{4}{5}c$.

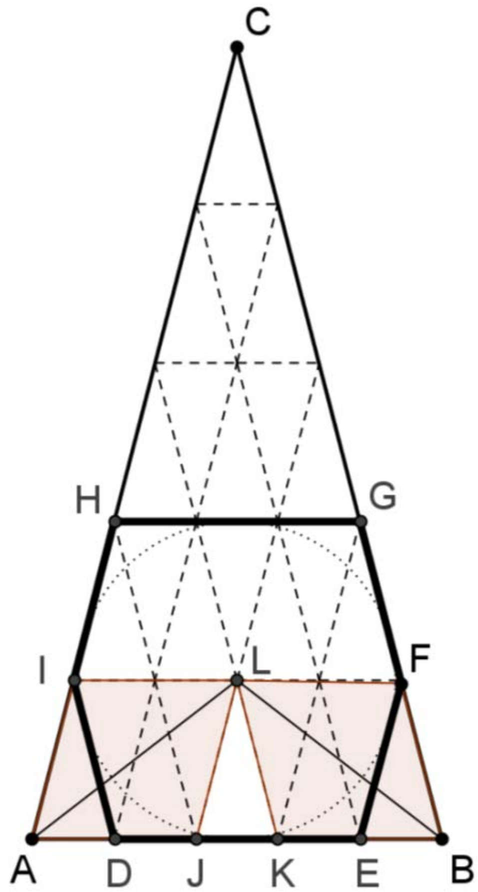
Zerlegt man das Sechseck DEFGHI nun in die sechs Dreiecke MDE, MEF, MFG, MGH, MHI und MID, in denen jeweils eine Sechseckseite als Grundseite eine zugehörige Höhe der Länge r hat, so erhält man den Flächeninhalt:



$$\begin{aligned}
A_{\text{Sechseck}} &= A_{\Delta MDE} + A_{\Delta MEF} + A_{\Delta MFG} + A_{\Delta MGH} + A_{\Delta MHI} + A_{\Delta MID} \\
&= \frac{1}{2}r\cdot\overline{DE} + \frac{1}{2}r\cdot\overline{EF} + \frac{1}{2}r\cdot\overline{FG} + \frac{1}{2}r\cdot\overline{GH} + \frac{1}{2}r\cdot\overline{HI} \\
&\qquad + \frac{1}{2}r\cdot\overline{ID} \\
&= \frac{1}{2}r\cdot\left(\overline{DE} + \overline{EF} + \overline{FG} + \overline{GH} + \overline{HI} + \overline{ID}\right) \\
&= \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{5}h_c\cdot\left(\frac{3}{5}c + \frac{4}{5}c + \frac{3}{5}c + \frac{4}{5}c\right) \\
&= \frac{14}{25}\cdot\frac{1}{2}ch_c = \frac{14}{25}\cdot A_{\Delta ABC}
\end{aligned}$$

Also gilt $A_{\text{Sechseck}} : A_{\Delta ABC} = 14 : 25$.

3. Beweisvorschlag (Mit einer Parkettierung des Dreiecks):



Teilt man jede Dreiecksseite des Dreiecks ABC in fünf gleiche Teile und zeichnet Parallelen zu den Dreiecksseiten, so zerlegen diese Parallelen das Dreieck ABC in 25 kleine kongruente, zum Ausgangsdreieck ähnliche gleichschenklige Dreiecke.
In diesen ist also ebenfalls die Basis jeweils halb so lang wie ein Schenkel.
Im Bild rechts sind zusätzlich zu A, B und C weitere Eckpunkte D bis L der kleinen Dreiecke markiert.
Wegen $\overline{AJ} = \overline{AD} + \overline{DJ} = 2 \cdot \overline{AD} = \overline{AI}$ ist das Parallelogramm AJLI sogar eine Raute, in der dann AL als Diagonale und Symmetrieachse gleichzeitig Innenwinkelhalbierende des Winkels bei A ist.
Genauso ist BL Innenwinkelhalbierende des Winkels bei B.
Somit ist L als Schnittpunkt dieser beiden Winkelhalbierenden der Inkreismittelpunkt des Dreiecks ABC.

Da weiter aufgrund der Konstruktion der Parkettierung benachbarte Parallelen zu einer Dreiecksseite jeweils gleichen Abstand haben, hat L denselben Abstand von BC wie von ID, denn L liegt von beiden Strecken aus auf dem zweiten Streifen der Schar.
Die Strecke ID liegt also auf dem Bild der Geraden BC bei Punktspiegelung an L.
Genauso sieht man, dass die Strecken HG und EF auf den Bildern der Geraden AB bzw. AC bei Punktspiegelung an L liegen.
Das Sechseck DEFGHI ist also das gesuchte Sechseck, in dem sich das Dreieck ABC und das an L punktgespiegelte Dreieck überschneiden. Da es aus genau 14 der 25 kleinen Dreiecke besteht, ist das gesuchte Flächenverhältnis 14:25.