Landeswettbewerb Mathematik
Baden-Württemberg

Musterlösungen 2. Runde 2011/2012

Aufgabe 1

Auf einem Tisch liegen zwei Haufen mit Streichhölzern, der eine mit 57, der andere mit 67 Streichhölzern. Lea und Merve ziehen abwechselnd. Wer am Zug ist, muss von einem der beiden Haufen ein, zwei oder drei Streichhölzer entfernen. Wer von einem Haufen das letzte Streichholz nimmt, hat gewonnen.

Lea beginnt. Kann sie den Sieg erzwingen?

Lösung:
Ja, Lea kann den Sieg erzwingen.

1. Beweisvorschlag:
Wir sprechen im Folgenden von einer *4-Verteilung* der Streichhölzer auf die beiden Haufen, wenn die Anzahlen der Streichhölzer auf den beiden Haufen den gleichen Rest bei Division durch 4 besitzen.

Zunächst zwei Vorüberlegungen:
(1) Macht ein Spieler bei einer 4-Verteilung einen beliebigen regulären Zug, dann liegt nach seinem Zug keine 4-Verteilung mehr vor, da er entweder 1 oder 2 oder 3 Streichhölzer - und damit kein Vielfaches von 4 - von einem Haufen nehmen muss.

(2) Liegt eine Verteilung vor, die keine 4-Verteilung ist und bei der beide Haufen mehr als drei Hölzer haben, dann sind die Anzahlen der Hölzer in den beiden Haufen unterschiedlich. Nun ist es möglich, durch Wegnahme von 1 oder 2 oder 3 Streichhölzern vom Haufen mit der größeren Streichholzanzahl eine 4-Verteilung zu erreichen. Beide Haufen haben nach diesem Zug weiterhin mehr als drei Hölzer.

Lea kann den Sieg nun wie folgt erzwingen: Sie zieht im ersten Zug durch Wegnahme von 2 Streichhölzern auf 57 und 65 Streichhölzer. Dies ist eine 4-Verteilung, da beide Anzahlen den Rest 1 bei Division durch 4 lassen.

Nach dem ersten Zug von Lea muss Merve in ihrem ersten Zug nach (1) die 4-Verteilung zerstören, so dass Lea keine 4-Verteilung vorfindet. Nach (2) kann Lea in ihrem zweiten Zug die 4-Verteilung wieder herstellen.

Lea spielt so, dass sie sicher vor jedem ihrer Züge keine 4-Verteilung vorfindet. Sie findet also vor jedem ihrer Züge eine der beiden folgenden Situationen vor:

Situation (A): Es liegt keine 4-Verteilung vor und ein Haufen hat drei oder weniger Hölzer.
Situation (B): Es liegt keine 4-Verteilung vor und beide Haufen haben mehr als drei Hölzer.

Wenn Lea bei einem ihrer Züge Situation (B) vorfindet, nimmt sie - wie in (2) beschrieben - vom größeren Haufen 1 oder 2 oder 3 Streichhölzer, so dass Merve danach eine 4-Verteilung vorfindet, in der weiterhin beide Haufen mehr als drei Streichhölzer besitzen. Merve kann in diesem Fall im nächsten Zug also sicher nicht einen Haufen abräumen und muss Lea nach (1) wieder eine Verteilung hinterlassen, die keine 4-Verteilung ist. Lea wird also sicher beim nächsten Zug wieder wie gewünscht Situation (A) oder (B) vorfinden.

Wenn Lea Situation (A) vorfindet, so hat sie gewonnen, da sie einen Haufen abräumen kann.

Spielt Lea nach dieser Strategie, so werden es bei jedem Zug weniger Streichhölzer und da das Spiel nach endlich vielen Zügen beendet sein muss, findet Lea irgendwann Situation (A) vor und hat gewonnen.

2. Beweisvorschlag:

Vorbemerkung: Das Spiel endet nach einer endlichen Anzahl von Zügen, da nur eine endliche Anzahl von Spielsteinen vorhanden ist und die Anzahl in jedem Spielzug abnimmt.

Eine Spielstellung wird durch ein geordnetes Paar natürlicher Zahlen (a;b) beschrieben, wobei a>0 die Anzahl der Hölzer auf dem ersten Stapel und b>0 die Anzahl der Hölzer auf dem zweiten Stapel bezeichnet.

Die Menge M aller Spielstellungen wird zerlegt in zwei Mengen G und V:

$V = \{(a;b) \mid a \geq 4 \text{ und } b \geq 4 \text{ und } 4 \text{ teilt } |a-b|\}$

$G = \{(a;b) \mid 0 < a \leq 3 \text{ oder } 0 < b \leq 3 \text{ oder } 4 \text{ teilt nicht } |a-b|\}$.

Offensichtlich ist M die Vereinigung von G und V und $G \cap V = \varnothing$.

Man zeigt nun, dass
1. für jede Spielstellung aus G ein Spielzug existiert, mit dem man entweder gewinnt oder der diese Spielstellung in eine Spielstellung aus der Menge V überführt und
2. für jede Spielstellung aus V jeder beliebige Spielzug diese Spielstellung in eine Spielstellung aus G überführt.

Zu 1.:
Ist (a;b) in G, dann tritt einer der drei Fälle ein:
Fall A: $0 < a \leq 3$;
Fall B: $0 < b \leq 3$;
Fall C: 4 teilt nicht $|a-b|$ und $a \geq 4$ und $b \geq 4$.
In den Fällen A und B kann man offensichtlich mit einem Spielzug gewinnen.

In Fall C sei o.B.d.A $a \leq b$. Die Differenz $b-a$ lässt in diesem Fall bei Division durch 4 den Rest i ($i \in \{1;2;3\}$). Somit $b-a=4k+i$ ($0 \leq k \in \mathbb{N}$) bzw. $b=4k+i+a$. Entfernt man nun vom Stapel mit b Hölzern genau i Hölzer, so hat dieser Stapel die neue Hölzchenzahl $b_{neu} = b-i = 4k+a$. Man erhält also die neue Stellung $(b_{neu};a) = (4k+a;a)$, bei der die Differenz $b_{neu} - a = 4k$ durch 4 teilbar ist und bei der $b_{neu} \geq a \geq 4$ gilt. Die entstehende Spielstellung ist also aus V.

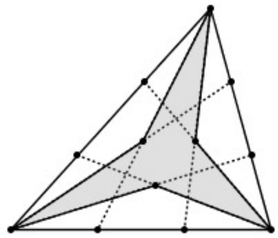
Zu 2.:
Sei (a;b) in V und o.B.d.A. $b \geq a \geq 4$. Die Differenz $b-a$ ist durch 4 teilbar. Entfernt man nun von einem der Stapel ein, zwei oder drei Hölzer, dann erkennt man, dass die Differenz danach nicht mehr durch 4 teilbar ist, d.h. die neue Spielstellung ist nicht in V. Da aber auch $b \geq a \geq 4$ gilt, kann nach dem Spielzug keiner der beiden Stapel leer sein, d.h. man erhält eine Spielstellung aus M, die nicht in V ist. Folglich ist die neue Spielstellung aus G.

Ein Spielzug mit dem man gewinnt, ist also nur möglich, wenn eine Stellung aus G vorliegt. Ein Spieler, der eine Stellung aus G vorfindet, kann nach 1. eine Stellung aus V herstellen, der andere Spieler muss nach 2. dann wieder eine Stellung aus G herstellen usw. bis der erste Spieler gewonnen hat (s. Vorbemerkung).

In unserer Situation ist zu Beginn $|a-b| = 67-57 = 10$. Da 10 von 4 nicht geteilt, handelt es sich um eine Spielstellung aus G. Daher kann Lea, die beginnt, den Sieg erzwingen.

Aufgabe 2

In einem Dreieck werden die Seiten gedrittelt und von den Drittelpunkten die Strecken zu den gegenüber liegenden Ecken gezeichnet. Es entsteht der nebenstehend markierte Stern.



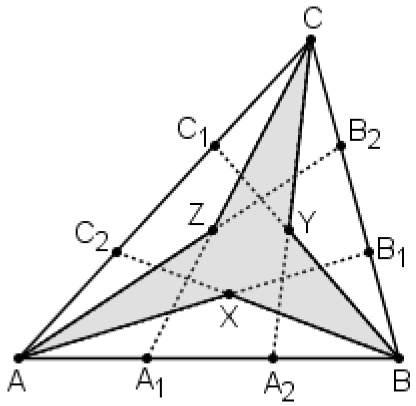
In welchem Verhältnis steht der Flächeninhalt dieses Sterns zu dem Flächeninhalt des Dreiecks?

Lösung:

$F_{Stern} : F_{Dreieck} = 2 : 5$

Bezeichnungen:

Die Eckpunkte des Dreiecks werden im Folgenden mit A, B und C, die Drittelpunkte Mit A_1, A_2, B_1, B_2, C_1 und C_2 sowie der Schnittpunkt von AB_1 und BC_2 mit X, der Schnittpunkt von BC_1 mit CA_2 mit Y und der Schnittpunkt von CA_1 mit AB_2 mit Z bezeichnet.



Der Abstand eines Punktes P von einer Geraden g wird mit d(g;P) bezeichnet.

1. Beweisvorschlag (Strahlensatz):

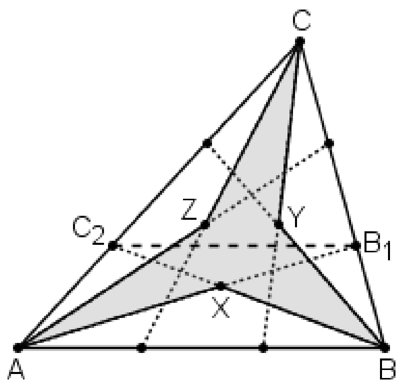
Nach Voraussetzung

$$\overline{CC_2} : \overline{CA} = \overline{CB_1} : \overline{CB} = 2 : 3.$$

Daraus folgt nach der Umkehrung des 1. Strahlensatzes: C_2B_1 ist parallel zu AB. Außerdem

$$\overline{C_2B_1} = \frac{2}{3} \cdot \overline{AB}, \ d(C_2B_1;C) = \frac{2}{3} \cdot d(AB;C),$$

$$\text{d.h. } d(AB;C_2B_1) = \frac{1}{3} \cdot d(AB;C) \ (*)$$



Nach dem Strahlensatz mit Zentrum X ergibt sich

$$d(AB;X) : d(C_2B_1;X) = \overline{AB} : \overline{C_2B_1} = 3 : 2, \text{ also } d(AB;X) = \frac{3}{5} \cdot d(AB;C_2B_1).$$

Mit (*) erhält man damit:

$$d(AB;X) = \frac{3}{5} \cdot \frac{1}{3} \cdot d(AB;C) = \frac{1}{5} \cdot d(AB;C)$$

Somit gilt: $F_{\Delta ABX} = \frac{1}{2} \cdot \overline{AB} \cdot d(AB;X) = \frac{1}{2} \cdot \overline{AB} \cdot \frac{1}{5} \cdot d(AB;C) = \frac{1}{5} \cdot F_{\Delta ABC}$.

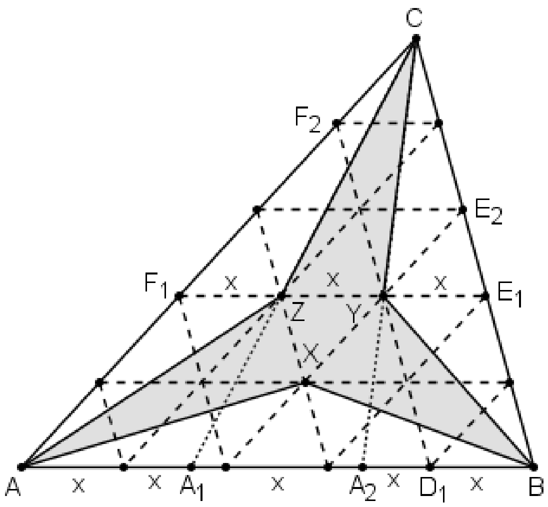
Analog: $F_{\Delta BCY} = \frac{1}{5} \cdot F_{\Delta ABC}$ und $F_{\Delta CAZ} = \frac{1}{5} \cdot F_{\Delta ABC}$.

Daraus folgt: $F_{Stern} = F_{\Delta ABC} - (F_{\Delta ABX} + F_{\Delta BCY} + F_{\Delta CAZ}) = F_{\Delta ABC} - \frac{3}{5} \cdot F_{\Delta ABC} = \frac{2}{5} \cdot F_{\Delta ABC}$.

Also: $F_{Stern} : F_{\Delta ABC} = 2 : 5$.

2. Beweisvorschlag (Zerlegung):

Jede der drei Seiten des Dreiecks ABC wird in fünf gleiche Teile geteilt. Dann werden diese Teilungspunkte durch Parallelen zu den Dreiecksseiten miteinander verbunden. Das Dreieck wurde durch diese Parallelen in 25 kongruente Teildreiecke zerlegt, die ähnlich zum Ausgangsdreieck sind.



F_1 und E_1 seien die Teilungspunkte von AC bzw. BC, die diese Strecken im Verhältnis 2:3 teilen; d. h. es gilt:
$\overline{CF_1} : \overline{CA} = \overline{CE_1} : \overline{CB} = 3:5$.

Da die Strecke AB durch die Teilungspunkte in fünf Teile der Länge x zerlegt wird, hat demnach die Stecke F_1E_1 die Länge 3x. Sie wird durch die Parallelen in drei gleiche Teile der Länge x geteilt. Die zugehörigen Teilungspunkte heißen Z und Y.

Die Geraden CZ und CY schneiden AB in den Punkten A_1 und A_2.
Da die Parallele F_1E_1 zu AB durch Z und Y in drei gleiche Teile zerlegt wird, teilen A_1 und A_2 die Strecke AB ebenfalls in drei gleiche Teile. Die Strecken CA_1 und CA_2 sind also genau die in der Aufgabenstellung gegebenen Strecken, mit denen die Seiten des Sterns gebildet werden; Z und Y sind dabei innere Eckpunkte des Sterns.

Sind F_{klein} der Flächeninhalt eines der 25 kleinen Dreiecke und $F_{groß}$ der Flächeninhalt des gesamten Dreiecks ABC, so gilt: $25 \cdot F_{klein} = F_{groß}$.

Da das Viereck CF_2YE_2 ein Parallelogramm ist, das aus vier kleinen Dreiecken zusammengesetzt ist, gilt: $F_{\Delta CYE_2} = \frac{1}{2} \cdot F_{CF_2YE_2} = \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot F_{klein} = 2 \cdot F_{klein}$.

Somit ist $F_{\Delta CYE_1} = F_{\Delta CYE_2} + F_{\Delta E_2YE_1} = 2 \cdot F_{klein} + F_{klein} = 3 \cdot F_{klein}$.

Analog zu obigen Überlegungen ist: $F_{\Delta BE_1Y} = \frac{1}{2} \cdot F_{BE_1YD_1} = \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot F_{klein} = 2 \cdot F_{klein}$.

Damit hat das gesamte Außendreieck BCY den Flächeninhalt:

$$F_{\Delta BCY} = F_{\Delta BE_1Y} + F_{\Delta CYE_1} = 2 \cdot F_{klein} + 3 \cdot F_{klein} = 5 \cdot F_{klein}$$

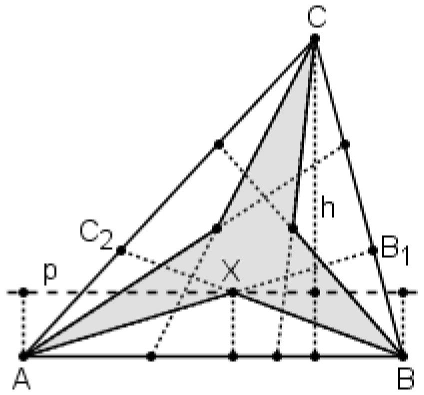
Analog haben auch die anderen beiden Dreiecke AZC und ABX außerhalb des Sterns den Flächeninhalt $5 \cdot F_{klein}$.

Insgesamt hat also die Fläche außerhalb des Sterns den Inhalt $15 \cdot F_{klein}$.
Für den Stern bleibt demnach der Inhalt $F_{groß} - 15 \cdot F_{klein} = 25 \cdot F_{klein} - 15 \cdot F_{klein} = 10 \cdot F_{klein}$.

Somit ist das gesuchte Flächenverhältnis $(10 \cdot F_{klein}) : (25 \cdot F_{klein}) = 2 : 5$.

3. Beweisvorschlag (Schwerelinien):

Wir denken uns in den Ecken A, B und C Punktmassen m_A, m_B und m_C.



Da $\overline{AC_2} = \frac{1}{2} \cdot \overline{CC_2}$ und $\overline{BB_1} = \frac{1}{2} \cdot \overline{CB_1}$, gilt:

$$d(BC_2;A) = \frac{1}{2} \cdot d(BC_2;C) \text{ und } d(AB_1;B) = \frac{1}{2} \cdot d(AB_1;C).$$

Es ist BC_2 genau dann Schwerelinie in Dreieck ABC, wenn $m_A \cdot d(BC_2;A) = m_C \cdot d(BC_2;C)$ (Hebelgesetz).
Dies ist genau dann der Fall, wenn $m_A = 2 \cdot m_C$. (1)

Analog ist AB_1 genau dann Schwerelinie in Dreieck ABC, wenn $m_B \cdot d(AB_1;B) = m_C \cdot d(AB_1;C)$.
Dies ist genau dann der Fall, wenn $m_B = 2 \cdot m_C$. (2)

Aus (1) und (2) folgt: Ist $m_A = m_B = 2 \cdot m_C$, so ist der Schnittpunkt X von BC_2 und AB_1 der Schwerpunkt des Dreiecks ABC und damit ist jede Gerade durch X Schwerelinie des Dreiecks ABC.
Insbesondere ist die Parallele p zu AB durch X Schwerlinie des Dreiecks.

Damit gilt: $m_A \cdot d(p;A) + m_B \cdot d(p;B) = m_C \cdot d(p;C)$.

Mit (1) und (2) sowie $d(p;A) = d(p;B) = d(AB;X)$ erhält man daraus:

$$2 \cdot m_C \cdot d(AB;X) + 2 \cdot m_C \cdot d(AB;X) = m_C \cdot d(p;C) \Leftrightarrow 4 \cdot d(AB;X) = d(p;C)$$

Damit ergibt sich für die Höhe h des Dreiecks ABC:

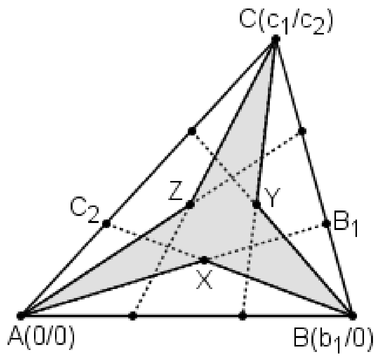
$$h = d(AB;X) + d(p;C) = d(AB;X) + 4 \cdot d(AB;X) = 5 \cdot d(AB;X)$$

Also: $$F_{\Delta ABC} = \frac{1}{2} \cdot \overline{AB} \cdot h = \frac{1}{2} \cdot \overline{AB} \cdot 5 \cdot d(AB;X) = 5 \cdot F_{\Delta ABX} \Leftrightarrow F_{\Delta ABX} = \frac{1}{5} \cdot F_{\Delta ABC}.$$

Das analoge Vorgehen wie beim 1. Beweisvorschlag liefert: $F_{Stern} : F_{\Delta ABC} = 2:5$.

4. Beweisvorschlag (Vektorrechnung):

Legt man über das Dreieck ABC ein Koordinatensystem durch A(0|0), B(b_1|0) und C(c_1|c_2), so gilt:



$$\overrightarrow{AB_1} = \overrightarrow{AB} + \frac{1}{3} \cdot \overrightarrow{BC} = \begin{pmatrix} b_1 \\ 0 \end{pmatrix} + \frac{1}{3} \cdot \begin{pmatrix} c_1 - b_1 \\ c_2 \end{pmatrix} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 2 \cdot b_1 + c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} \text{ und}$$

$$\overrightarrow{AC_2} = \frac{1}{3} \cdot \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix}.$$

Für X gilt: $\lambda \cdot \overrightarrow{AB_1} = \overrightarrow{AB} + \mu \cdot \overrightarrow{BC_2}$.

Einsetzen ergibt (I) $\lambda \cdot \left(\frac{2}{3} \cdot b_1 + \frac{1}{3} \cdot c_1 \right) = b_1 + \mu \cdot \left(\frac{1}{3} \cdot c_1 - b_1 \right)$ und (II) $\lambda \cdot \frac{1}{3} \cdot c_2 = \mu \cdot \frac{1}{3} \cdot c_2$.

Aus (II) folgt $\lambda = \mu$. Dies in (I) eingesetzt ergibt $\lambda \cdot \frac{5}{3} \cdot b_1 = b_1$ bzw. $\lambda = \frac{3}{5}$.

Somit folgt für X: $x_2 = \frac{1}{3} \cdot \frac{3}{5} \cdot c_2 = \frac{1}{5} \cdot c_2$. Da c_2 Höhe in Dreieck ABC und x_2 Höhe in Dreieck ABX ist, gilt: $F_{\Delta ABX} = \frac{1}{5} \cdot F_{\Delta ABC}$.

Analoges Vorgehen wie im 1. Beweisvorschlag liefert $F_{Stern} : F_{\Delta ABC} = 2:5$.

Aufgabe 3

Bestimme alle Quadratzahlen, die um 1 größer sind als die Summe von zwei aufeinander folgenden Zweierpotenzen.

Lösung:

Die gesuchten Quadratzahlen sind

(1) $4 = 2^2$ (2) $25 = 5^2$ (3) $49 = 7^2$

Beweismöglichkeit

Sei $q = n^2$ eine Quadratzahl, deren Vorgänger eine Summe von zwei aufeinander folgenden Zweierpotenzen ist.

Dann gilt also für eine natürliche Zahl $a \geq 0$: $n^2 - 1 = 2^a + 2^{a+1}$. (*)

Da $2^{a+1} = 2 \cdot 2^a$, ist aber $2^a + 2^{a+1} = 2^a + 2 \cdot 2^a = 3 \cdot 2^a$.
Somit ist Gleichung (*) gleichwertig zu $(n-1) \cdot (n+1) = 3 \cdot 2^a$. (**)

Fall 1: n ist gerade.
In diesem Fall sind $n - 1$ und $n + 1$ beide ungerade und damit ist auch die linke Seite von (**) ungerade. Somit muss auch die rechte Seite von (**) ungerade sein.
Für $a \geq 1$ ist aber 2^a gerade, somit kommt in diesem Fall nur $a = 0$ in Frage.
Für $a = 0$ ist aber $2^a + 2^{a+1} = 1 + 2 = 3$ der Vorgänger der Quadratzahl 4.
Dies ist Lösung (1).

Fall 2: n ist ungerade.
Dann sind $n - 1$ und $n + 1$ beide gerade. Es ist aber nur genau eine dieser beiden Zahlen durch vier teilbar, da die beiden Zahlen die Differenz 2 haben.

Fall 2a: $n - 1$ ist durch 2, aber nicht durch 4 teilbar.
Wegen $(n-1) \cdot (n+1) = 3 \cdot 2^a$ kann $n - 1$ außer durch 2 allenfalls noch durch 3 teilbar sein. Es bleibt also nur $n - 1 = 2$ oder $n - 1 = 6$.
Falls $n - 1 = 2$, so ist $n + 1 = 4$ nicht durch 3 teilbar. Wegen $(n-1) \cdot (n+1) = 3 \cdot 2^a$ muss aber genau eine der beiden Zahlen $n - 1$ und $n + 1$ durch 3 teilbar sein, der Fall $n - 1 = 2$ ist also nicht möglich.
Es bleibt also nur $n - 1 = 6$. Dann ist $n = 7$ und $n^2 - 1 = 48 = 2^4 + 2^5$ ist eine Summe von zwei aufeinander folgenden Zweierpotenzen.
Somit ist die Quadratzahl 49 eine der gesuchten Zahlen. Dies ist Lösung (3).

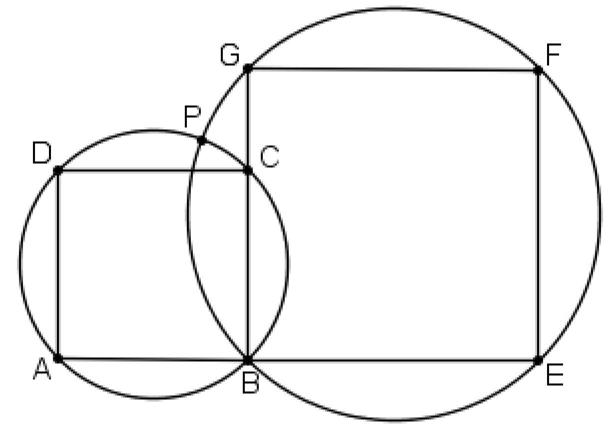
Fall 2b: $n + 1$ ist durch 2, aber nicht durch 4 teilbar.
Wegen $(n-1) \cdot (n+1) = 3 \cdot 2^a$ kann $n + 1$ außer durch 2 nur noch durch 3 teilbar sein.
Es bleibt also nur $n + 1 = 2$ oder $n + 1 = 6$.
Falls $n + 1 = 2$, so ist $n - 1 = 0$, dies ist wegen $(n-1) \cdot (n+1) = 3 \cdot 2^a$ nicht möglich.
Es bleibt also nur $n + 1 = 6$. Dann ist $n = 5$ und $n^2 - 1 = 24 = 2^3 + 2^4$ ist eine Summe von zwei aufeinander folgenden Zweierpotenzen.
Somit ist die Quadratzahl 25 eine der gesuchten Zahlen. Dies ist Lösung (2).

Da damit alle Fälle erfasst sind, ist nachgewiesen, dass es nur die drei genannten Lösungen 4, 25 und 49 geben kann, die alle drei auch tatsächlich Lösungen sind.

Aufgabe 4

Die beiden Quadrate ABCD und BEFG liegen so, dass C ein innerer Punkt der Strecke BG ist.
Der Punkt P ist der von B verschiedene Schnittpunkt der Umkreise dieser Quadrate.

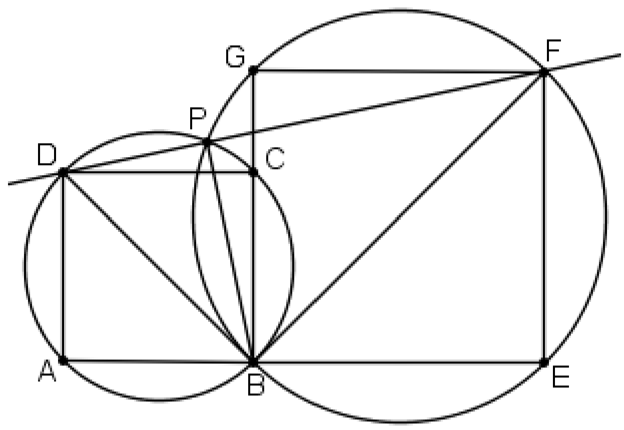
Zeige: Die Geraden DF, CE und AG schneiden sich in P.



1. Beweisvorschlag (Satz des Thales):

Der Beweis erfolgt in zwei Schritten:

1. Schritt: Der Punkt P liegt auf der Gerade DF.
Dazu wird nachgewiesen wird, dass $\sphericalangle DPF = 180°$ ist.

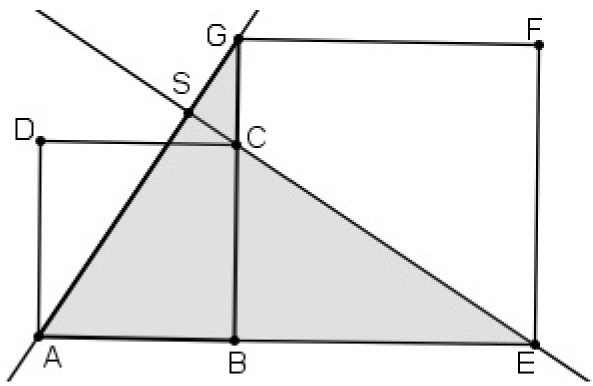


Beweis:
Der Punkt P liegt auf dem Kreis mit dem Durchmesser DB und auf dem Kreis mit dem Durchmesser BF. Mit dem Satz des Thales folgt deshalb: $\sphericalangle DPB = 90°$ und $\sphericalangle BPF = 90°$.

Für den Winkel $\sphericalangle DPF$ gilt dann: $\sphericalangle DPF = \sphericalangle DPB + \sphericalangle BPF = 180°$,
d.h. P liegt auf der Gerade DF.

2. Schritt: Der Punkt P liegt auf den Geraden EC und AG.
Zunächst wird in a) gezeigt, dass sich die Geraden EC und AG orthogonal in einem Punkt S schneiden. In b) wird nachgewiesen, dass dieser Schnittpunkt S auf beiden Umkreisen liegt, d.h. mit dem Punkt P übereinstimmt.

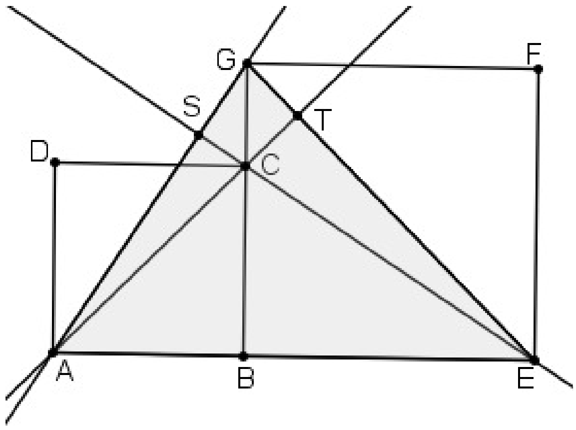
Beweis:
a) Die beiden Dreiecke ABG und CBE sind kongruent, da sie in zwei Seiten und dem eingeschlossenen Winkel übereinstimmen (Kongruenzsatz sws: $\overline{AB} = \overline{BC}$, $\overline{BG} = \overline{BE}$, $\sphericalangle GBA = \sphericalangle EBC = 90°$).
Sie stimmen deshalb auch in anderen einander entsprechenden Größen überein.



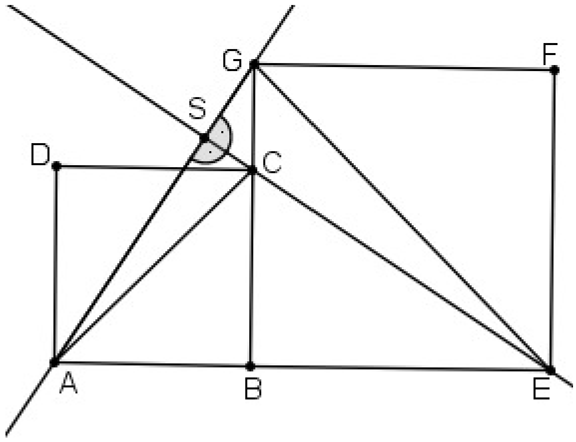
Insbesondere gilt: $\sphericalangle CEB = \sphericalangle AGB$. Bezeichnet man mit S den Schnittpunkt der Geraden AG und CE, so folgt für den Winkel $\sphericalangle ASE$ im Dreieck AES:
$\sphericalangle ASE = 180° - \sphericalangle BAG - \sphericalangle CEB = 180° - \sphericalangle BAG - \sphericalangle AGB = \sphericalangle GBA = 90°$.

Beweisvariante 1 zu a):
Die Gerade CE geht aus der Gerade AG durch eine Drehung um B um 90° mit dem Uhrzeigersinn hervor. Daraus folgt sofort die Behauptung.

Beweisvariante 2 zu a):
Die Diagonalen AC und GE sind orthogonal. Bezeichnet man den Schnittpunkt der Geraden AC und GE mit T, so ist AT eine Höhe im Dreieck AEG, da die Diagonalen im Quadrat senkrecht stehen.
GB ist ebenfalls eine Höhe in diesem Dreieck mit C als Höhenschnittpunkt.
Da die dritte Höhe ebenfalls durch C geht, ist SE die dritte Höhe im Dreieck ABG und damit ist SE orthogonal zu AG.



b) In a) wurde gezeigt, dass sich die Geraden EC und AG im Punkt S orthogonal schneiden. Die Dreiecke ASC und SEG sind somit rechtwinklig mit $\sphericalangle ASC = \sphericalangle ESG = 90°$.
Mit der Umkehrung des Satzes von Thales folgt daraus, dass S sowohl auf dem Kreis mit Durchmesser GE als auch auf dem Kreis mit Durchmesser AC liegt. Diese Kreise sind die Umkreise der beiden Quadrate.



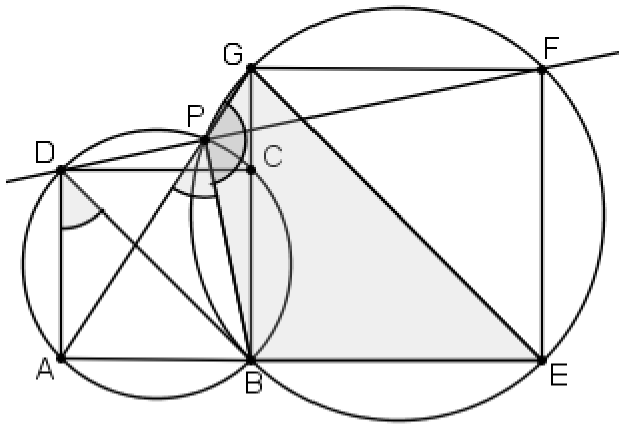
S ist somit der von B verschiedene Schnittpunkt P dieser beiden Umkreise. Damit ist gezeigt, dass die beiden Geraden AG und EC durch P gehen.

2. Beweisvorschlag (Umfangswinkelsatz bzw. Sehnenvierecke):
Der Beweis erfolgt in drei Schritten:

1) Der Punkt P liegt auf der Gerade DF.
Beweis siehe Lösungsvorschlag 1, 1. Schritt.

2) Der Punkt P liegt auf der Gerade AG.
Dazu wird nachgewiesen wird, dass $\sphericalangle APG = 180°$ ist.

Beweis:
Die Winkel $\sphericalangle ADB$ und $\sphericalangle APB$ sind Umfangswinkel im Umkreis des Quadrates ABCD über der Sehne AB.



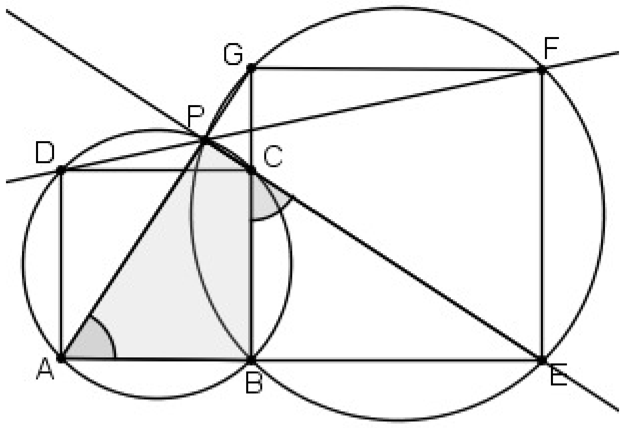
$\sphericalangle$ADB ist Basiswinkel im gleichschenklig-rechtwinkligen Dreieck ABD.
Mit dem Umfangswinkelsatz folgt deshalb: $\sphericalangle APB = \sphericalangle ADB = 45°$.

$\sphericalangle$GEB ist ein Basiswinkel im gleichschenklig-rechtwinkligen Dreieck BEG.
Für den Winkel $\sphericalangle$BPG im Sehnenviereck PBEG folgt daraus:
$\sphericalangle BPG = 180° - \sphericalangle GEB = 180° - 45° = 135°$.

Für den Winkel $\sphericalangle$APG ergibt sich daraus:
$\sphericalangle APG = \sphericalangle APB + \sphericalangle BPG = 135° + 45° = 180°$.
Der Punkt P liegt demnach auf der Gerade AG.

3) Der Punkt P liegt auf der Geraden CE.
Dazu wird gezeigt, dass $\sphericalangle PCE = 180°$ ist.

Beweis:
Die Dreiecke ABG und BEC sind kongruent, da sie in zwei Seiten und dem eingeschlossenen Winkel übereinstimmen
(Kongruenzsatz sws: $\overline{AB} = \overline{BC}$,
$\overline{BG} = \overline{BE}$, $\sphericalangle GBA = \sphericalangle EBC = 90°$).
Sie stimmen deshalb auch in anderen einander entsprechenden Größen überein.
Insbesondere gilt: $\sphericalangle BCE = \sphericalangle BAG$.



Da P auf AG liegt (siehe 2)), gilt auch
$\sphericalangle BCE = \sphericalangle BAG = \sphericalangle BAP$. (1)

Im Sehnenviereck ABCP ergänzen sich gegenüberliegende Winkel zu 180°, für den Winkel $\sphericalangle$PCB folgt deshalb
$\sphericalangle PCB = 180° - \sphericalangle BAP$ (2)

Für den Winkel $\sphericalangle$PCE folgt aus (1) und (2):
$\sphericalangle PCE = \sphericalangle PCB + \sphericalangle BCE = (180° - \sphericalangle BAP) + \sphericalangle BAP = 180°$.
Der Punkt P liegt demnach auf der Gerade CE.