Landeswettbewerb Mathematik

Baden-Württemberg

Musterlösungen 1. Runde 2006

Aufgabe 1

Die Ziffern von 1 bis 5 sollen so in einer Reihe angeordnet werden, dass jedes Paar benachbarter Ziffern eine Zahl ergibt, die ein Produkt zweier einstelliger Zahlen ist.

Bestimme alle möglichen Anordnungen.

Zum Beispiel ist 43251 keine mögliche Anordnung. Es gilt zwar $32 = 4\cdot 8$ und $25 = 5\cdot 5$, aber 43 und 51 lassen sich nicht als Produkt von zwei einstelligen Zahlen schreiben.

Lösung:

Die einzigen möglichen Anordnungen sind 3 2 1 5 4, 3 2 1 4 5 und 3 5 4 2 1.

Beweis:

Die neben stehende Tabelle gibt einen Überblick über die zweistelligen Zahlen, die sich aus den Ziffern 1, 2, 3, 4 und 5 bilden lassen. Die Zahlen, die sich nicht als Produkt von zwei einstelligen Zahlen schreiben lassen, sind durchgestrichen.

~~11 = 1·11~~	12 = 2·6	~~13 = 1·13~~	14 = 2·7	15 = 3·5
21 = 3·7	~~22 = 2·11~~	~~23 = 1·23~~	24 = 4·6	25 = 5·5
~~31 = 1·31~~	32 = 4·8	~~33 = 3·11~~	~~34 = 2·17~~	35 = 5·7
~~41 = 1·41~~	42 = 6·7	~~43 = 1·43~~	~~44 = 4·11~~	45 = 5·9
~~51 = 3·17~~	~~52 = 4·13~~	~~53 = 1·53~~	54 = 6·9	~~55 = 5·11~~

In der mittleren Spalte der Tabelle – dort stehen die Zahlen mit Endziffer 3 - sind alle Zahlen durchgestrichen. Daran erkennt man, dass keine der möglichen Zahlen die Einerziffer 3 haben kann. Der einzige Platz in der Anordnung der fünf Ziffern, an dem nie eine Einerziffer steht, ist der erste Platz. Folglich muss die „3“ in der Anordnung ganz vorne stehen.

In der mittleren Zeile - das sind alle Zahlen mit Anfangsziffer 3 - sind nur die Zahlen 32 und 35 nicht durchgestrichen. Damit ist eine Anordnung der fünf Ziffern höchstens dann möglich, wenn sie mit 32 oder mit 35 beginnt.

Zuerst untersuchen wir mögliche Anordnungen, die mit 35 beginnen: In der unteren Zeile - das sind alle Zahlen mit Anfangsziffer 5 - ist nur die 54 nicht durchgestrichen. Eine Anordnung, die mit 35 beginnt, kann also nur mit 4 weiter gehen. Zeile 4 ergibt dann, dass die nächste Ziffer 2 oder 5 sein muss. Da die 5 aber schon am zweiten Platz der Anordnung vorkam, kann sie nicht noch einmal vorkommen, die vierte Ziffer muss also eine 2 sein. Aus Zeile 2 erkennt man, dass die 1, die einzige noch nicht vergebene Ziffer, eine zulässige Ziffer nach der 2 ist. Damit ist 3 5 4 2 1 eine mögliche Anordnung. Es ist die einzige, die mit 35 beginnt.

Nun untersuchen wir Anordnungen, die mit 32 beginnen. Die erste Spalte der Tabelle zeigt, dass die Ziffer 1 nur hinter der 2 stehen kann, 31, 41 und 51 sind unmöglich. Also muss die dritte Ziffer der Anordnung die 1 sein. Jetzt bleiben noch die Ziffern 4 und 5 für die beiden letzten Plätze übrig. Beide Anordnungen 3 2 1 5 4 und 3 2 1 4 5 erfüllen die Bedingungen.

Insgesamt sind somit nur die drei Anordnungen 3 5 4 2 1, 3 2 1 5 4 und 3 2 1 4 5 möglich. Das war zu zeigen.

Aufgabe 2

Heinz addiert die Größen der Innenwinkel eines ebenen Vielecks und erhält den Wert 2006°. Er hat dabei einen Winkel übersehen.

Wie groß kann dieser Winkel sein?

Lösung:

Der übersehene Winkel ist entweder 154° oder 334° groß.

Beweis:

Wir schreiben α für den gesuchten Winkel und n für die Anzahl der Ecken in dem Vieleck.

Die Winkelsumme in einem ebenen Vieleck mit n Ecken beträgt $(n-2)\cdot 180°$. Damit muss gelten:

$$(n-2)\cdot 180° = \alpha + 2006°$$

also $$\alpha = (n-2)\cdot 180° - 2006°.$$

Wir berechnen mit dieser Formel die Werte von α für n = 13, 14, 15 und 16 und schreiben sie in eine Tabelle:

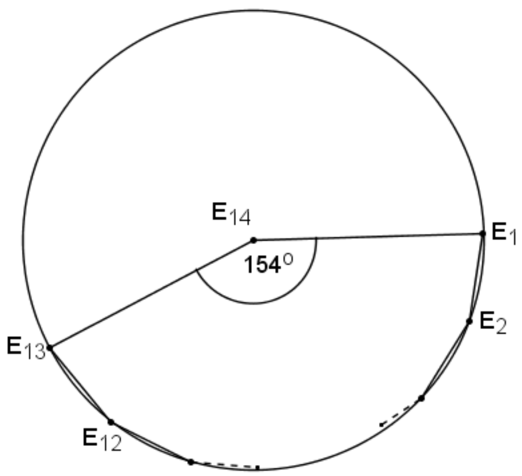
n	13	14	15	16
Winkelsumme $(n-2)\cdot 180°$	1980°	2160°	2340°	2520°
α	-26°	154°	334°	514°

Man erkennt an der Formel $\alpha = (n-2)\cdot 180° - 2006°$, dass α größer wird, wenn n größer wird und dass α kleiner wird, wenn n kleiner wird. Zusätzlich muss der Innenwinkel α kleiner als 360° sein.

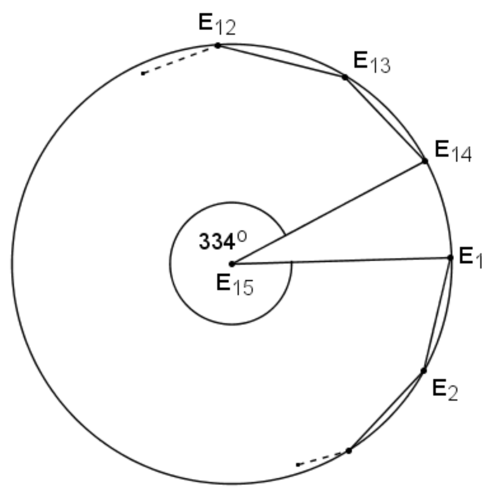
Also sind 154° und 334° die einzigen möglichen Werte.

Diese beiden Winkelwerte kommen auch tatsächlich in Vielecken, in denen die restlichen Winkel zusammen 2006° ergeben, vor: Wir legen die Ecke E_n (n = 14 oder n = 15) auf den Mittelpunkt eines Kreises und zeichnen dort einen Winkel mit den oben berechneten Maßen, also 154° für n = 14 und 334° für n = 15. Diese Winkel schneiden die Kreislinie in zwei Punkten, die wir mit E_1 bzw. E_{n-1} benennen. Den so begrenzten Kreisbogen teilen wir in $n-2$ gleiche Teile auf, die Teilpunkte sind dann die Ecken E_2, ..., E_{n-1} des Vielecks (siehe untenstehende Abbildungen).

n = 14:



n = 15:



Aufgabe 3

Für welche natürlichen Zahlen n gibt es genau zwei verschiedene Primzahlen, die $n^3 - n$ *teilen?*

Lösung:

Nur für $n = 2$ und $n = 3$ gibt es genau zwei verschiedene Primzahlen, die $n^3 - n$ teilen.

1. Beweisvorschlag:

Es ist $n^3 - n = n(n^2 - 1) = (n-1)n(n+1)$ für alle natürlichen Zahlen n. Also ist $n^3 - n$ das Produkt von drei aufeinander folgenden ganzen Zahlen.
Unter drei aufeinander folgenden ganzen Zahlen ist stets mindestens eine durch 2 und genau eine durch 3 teilbar. Die beiden Primzahlen 2 und 3 sind also stets Teiler von $n^3 - n$. Damit muss - wenn n die Bedingungen der Aufgabe erfüllen soll - die Primfaktorzerlegung von $n^3 - n$ stets die Faktoren 2 und 3 enthalten, aber keine weiteren.

1. Fall: $n = 0$ bzw. $n = 1$.
Dann ist $n^3 - n = 0$ und alle Primzahlen sind Teiler von $n^3 - n$. Somit sind $n = 0$ und $n = 1$ nicht bei den gesuchten Zahlen.

2. Fall: $n = 2$.
Dann ist $n^3 - n = 2^3 - 2 = 6 = 2 \cdot 3$. In diesem Fall sind 2 und 3 die beiden einzigen Primzahlen, die Teiler von $n^3 - n$ sind. Also ist $n = 2$ eine der gesuchten Zahlen.

3. Fall: $n = 3$.
Dann ist $n^3 - n = 3^3 - 3 = 24 = 2^3 \cdot 3$. Auch in diesem Fall sind 2 und 3 die beiden einzigen Primzahlen, die Teiler von $n^3 - n$ sind. Also ist $n = 3$ eine der gesuchten Zahlen.

4. Fall: $n > 3$ und n ist ungerade.
Wenn $n^3 - n = (n-1)n(n+1)$ nur die Primfaktoren 2 und 3 enthalten darf, so darf auch n nur die Primfaktoren 2 und 3 enthalten. Da n ungerade ist, darf n nur 3 als Primfaktor enthalten, n muss also eine Potenz von 3 sein.
Dann sind die zu n benachbarten Zahlen $n-1$ und $n+1$ beide gerade und beide nicht durch 3 teilbar. Da sie als Faktoren von $(n-1)n(n+1)$ nur die Primfaktoren 2 und 3 enthalten dürfen, müssen sie beide Potenzen 2 sein. Die einzigen Zweierpotenzen, die die Differenz 2 haben, sind aber 2 und 4: Die Differenz zwischen aufeinander folgenden Zweierpotenzen 2^{m+1} und 2^m ist 2^m, also größer als 2, wenn $m > 1$.
Somit müsste $n = 3$ sein. Dies steht aber im Widerspruch zur Fallbeschreibung. Es gibt also keine Lösung für n, die zu dieser Fallbeschreibung passt.

5. Fall: $n > 3$ und n ist gerade.
Dann sind $n-1$ und $n+1$ beide ungerade und beide größer als 2. Wenn $n^3 - n = (n-1)n(n+1)$ nur die Primfaktoren 2 und 3 enthalten darf, so dürfen auch $n-1$ und $n+1$ nur die Primfaktoren 2 und 3 enthalten. Die ungeraden Zahlen $n-1$ und $n+1$ dürfen also beide nur den Faktor 3 enthalten. Da sie eine Differenz von 2 haben ist dies unmöglich.
Es gibt also keine Lösung für n, die zu dieser Fallbeschreibung passt.

Da in den fünf Fällen alle möglichen Zahlen n untersucht sind, ist der Beweis abgeschlossen.

2. Beweisvorschlag:

Wenn $n = 0$ oder $n = 1$, so ist $n^3 - n = 0$ und hat mehr als zwei Primteiler.

Nun betrachten wir den Fall $n > 1$.

Jede Zahl, die größer als 1 ist, besitzt mindestens einen Primfaktor. Also besitzt auch n einen Primfaktor p. Wenn nun $n^3 - n = (n-1)n(n+1)$ genau zwei Primfaktoren enthalten soll, so dürfen die beiden Zahlen $n-1$ und $n+1$ nur einen weiteren Primfaktor q enthalten. Da $n-1$ und $n+1$ sich nur jeweils um 1 von n unterscheiden, können sie nicht ebenfalls Vielfache von p sein. Und da sie p nicht als Primfaktor haben, müssen sie Potenzen dieser anderen Primzahl q sein.

Als Potenzen von q sind aber $n-1$ und $n+1$ auch Vielfache von q – außer, wenn $n-1=1$ ist.

In diesem Fall ist aber $n = 2$. Dann hat $n^3 - n = 2^3 - 2 = 6 = 2 \cdot 3$ genau zwei Primteiler.

Also ist $n = 2$ eine der gesuchten Zahlen.

Als Vielfache von q unterscheiden sich $n-1$ und $n+1$ mindestens um q. Da sie sich ja um 2 unterscheiden, muss $q = 2$ sein. Die einzigen Zweierpotenzen, die die Differenz 2 haben, sind aber 2 und 4.
Somit ist $n = 3$. Dann ist $n^3 - n = 3^3 - 3 = 24 = 2^3 \cdot 3$. Also sind 2 und 3 die beiden einzigen Primzahlen, die Teiler von $3^3 - 3$ sind. Auch $n = 3$ ist eine der gesuchten Zahlen.

Weitere Lösungen außer $n = 2$ und $n = 3$ kann es nach diesem Beweis nicht geben.

3. Beweisvorschlag:

Wenn n gerade ist, so ist auch n^3 gerade, wenn n ungerade ist, so ist auch n^3 ungerade. Somit ist $n^3 - n$ in jedem Falle gerade.
Beim weiteren Beweis nennen wir eine natürliche Zahl eine *Dreierzahl*, wenn sie durch 3 teilbar ist. Für jede natürliche Zahl n ist entweder n oder $n - 1$ oder $n + 1$ eine Dreierzahl.
Es ist $n^3 - n = n(n^2-1) = (n-1)n(n+1)$. Da einer der drei Faktoren n, $n-1$ oder $n+1$ eine Dreierzahl ist, ist auch $n^3 - n$ eine Dreierzahl.
Insgesamt ist $n^3 - n$ also immer eine gerade Dreierzahl und hat also immer die Primteiler 2 und 3. Wir müssen untersuchen, für welche n es nur diese beiden Primteiler von $n^3 - n$ gibt.

Wie bereits in den ersten beiden Beweisvorschlägen gezeigt wurde, ist $n = 0$ und $n = 1$ nicht bei den gesuchten Zahlen, während $n = 2$ und $n = 3$ dazu gehören.

Sei nun $n > 3$. Wir unterscheiden nun sechs Fälle, die alle Möglichkeiten abdecken.

1. Fall: $n-1$ ungerade, $n-1$ Dreierzahl.
Dann ist $n+1$ ungerade und keine Dreierzahl. Somit hat $n+1$ und damit auch $n^3 - n = (n-1)n(n+1)$ einen weiteren Primfaktor außer 2 und 3.

2. Fall: $n-1$ ungerade, n Dreierzahl.
Dann ist $n-1$ ungerade und keine Dreierzahl. Somit hat $n-1$ und damit auch $n^3 - n = (n-1)n(n+1)$ einen weiteren Primfaktor außer 2 und 3.

3. Fall: $n-1$ ungerade, $n+1$ Dreierzahl.
Dann ist $n-1$ ungerade und keine Dreierzahl. Somit hat $n-1$ und damit auch $n^3-n=(n-1)n(n+1)$ einen weiteren Primfaktor außer 2 und 3.

4. Fall: n ungerade, $n-1$ Dreierzahl.
Dann ist n ungerade und keine Dreierzahl. Somit hat n und damit auch $n^3-n=(n-1)n(n+1)$ einen weiteren Primfaktor außer 2 und 3.

5. Fall: n ungerade, n Dreierzahl.
Dann sind $n-1$ und $n+1$ beide durch 2 teilbar. Eine der beiden Zahlen ist aber nicht durch 4 teilbar. Da diese wegen $n > 3$ aber größer als 2 und keine Dreierzahl ist, enthält sie einen von 2 und 3 verschiedenen Primfaktor. Somit enthält auch $n^3-n=(n-1)n(n+1)$ einen weiteren Primfaktor außer 2 und 3.

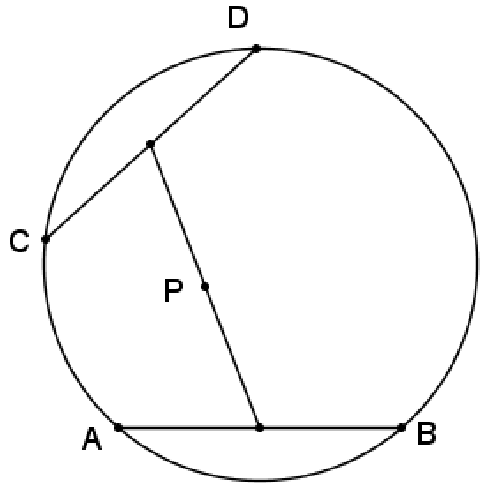
6. Fall: n ungerade, $n+1$ Dreierzahl.
Dann ist n ungerade und keine Dreierzahl. Somit hat n und damit auch $n^3-n=(n-1)n(n+1)$ einen weiteren Primfaktor außer 2 und 3.

In allen sechs Fällen gibt es also für $n > 3$ weitere, von 2 und 3 verschiedene Primfaktoren von n^3-n. Somit sind nur $n = 2$ und $n = 3$ bei den gesuchten Zahlen.

Aufgabe 4

Gegeben ist ein Kreis mit zwei gleich langen Sehnen AB und CD. P ist der Mittelpunkt der Verbindungsstrecke der Sehnenmittelpunkte. Die Sehne CD gleitet am Kreis, die Sehne AB bleibt fest.

Welche Bahn beschreibt dabei P?



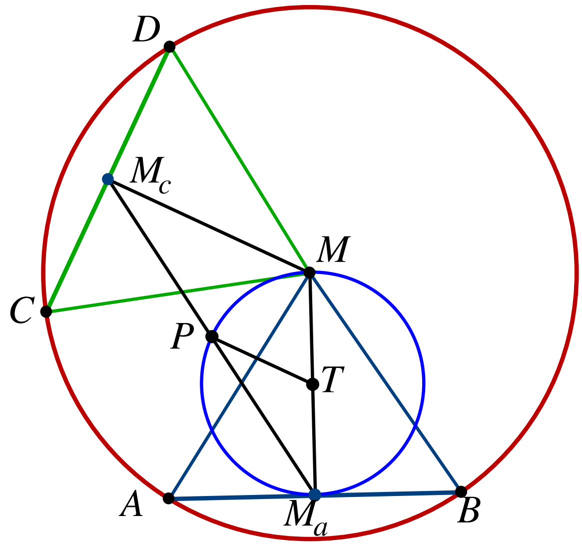
Vorbemerkung:

Wir bezeichnen den Mittelpunkt des gegebenen Kreises mit M, die Mittelpunkte von AB und CD mit M_a und M_c, sowie den Mittelpunkt vom MM_a mit T (siehe untenstehende Zeichnung).

Lösung:

Der Punkt P beschreibt den Thaleskreis über der Strecke MM_a.

1. Beweisvorschlag:



Die Dreiecke ABM und DCM sind kongruent, denn sie stimmen in drei Seiten überein. Somit stimmen auch die Höhen überein und es gilt $\overline{MM_a} = \overline{MM_c}$.

Außer in den unten behandelten Grenzfällen bilden die Punkte M, M_a und M_c ein Dreieck. In diesem Dreieck ist TP eine Mittelparallele, denn T ist Mittelpunkt der Seite MM_a und P ist Mittelpunkt der Seite M_cM_a. Somit gilt

$$\overline{TP} = \tfrac{1}{2}\overline{MM_c} = \tfrac{1}{2}\overline{MM_a}$$

P liegt also auf dem Thaleskreis über der Strecke MM_a, da dieser Kreis den Radius $\tfrac{1}{2}\overline{MM_a}$ und den Mittelpunkt T hat.

Wir kommen nun zu den Sonderfällen:

- Im Fall $M_a = M_c = P$ – dies ist genau dann der Fall, wenn die beiden Sehnen übereinstimmen – liegt P ebenfalls auf dem Thaleskreis über MM_a.
- In dem Fall, dass die Sehnen verschieden und parallel sind, ist M der Mittelpunkt der Verbindungsstrecke der Sehnenmittelpunkte und somit ist $P = M$. Der Punkt P liegt also ebenfalls auf dem Thaleskreis über MM_a.

Es muss umgekehrt noch gezeigt werden, dass jeder Punkt *P* des Thaleskreises über MM_a tatsächlich auch Mittelpunkt einer Verbindungsstrecke M_cM_a ist.
Dies sieht man wie folgt:

- Sei zunächst angenommen, dass der Punkt *P* ein von *M* verschiedener Punkt des Thaleskreises über MM_a ist. Auf der Geraden *(PM)* durch *M* und *P* liegt ein Durchmesser des Kreises. Spiegelt man die Sehne *AB* an *(PM)*, so wird der Kreis bei dieser Spiegelung auf sich selbst abgebildet, die Sehne *AB* wird also auf eine gleich lange Sehne *CD* abgebildet. Der Punkt *P* ist als Punkt der Spiegelachse gleich weit von M_a und dem Bildpunkt M_c entfernt, also ist *P* der Mittelpunkt der Verbindungsstrecke M_cM_a.
- Falls nun *P* mit *M* übereinstimmt, so wählt man als Spiegelachse die Orthogonale zu MM_a durch *M*. Ansonsten ist der Beweis analog wie im obigen Fall, in dem *P* von *M* verschieden ist.

2. Beweisvorschlag:

Wenn die Sehne *DC* am Kreis gleitet, dann verändert das Dreieck *CDM* seine Form nicht, insbesondere hat die Strecke MM_c immer die gleiche Länge; die Bahn des Punktes M_c ist also identisch mit der vollständigen Kreislinie des Kreises um *M* mit Radius $\overline{MM_c}$. Da die Sehnen *AB* und *CD* gleichlang sind, kann M_c auch die Lage von M_a einnehmen und damit ist $\overline{MM_a} = \overline{MM_c}$.

In jeder Lage von M_c ist *P* das Bild von M_c bei der zentrischen Streckung mit Streckzentrum M_a und Streckfaktor 1/2. Also ist die Bahn von *P* das Bild der Bahn von M_c unter dieser zentrischen Streckung. Da eine zentrische Streckung einen Kreis auf einen Kreis abbildet, ist also die Bahn von *P* wieder ein Kreis. Der Mittelpunkt des Bildkreises ist der Bildpunkt von *M* unter der zentrischen Streckung, das ist der Mittelpunkt *T* der Strecke MM_a.

Die Bahn von *P* ist der vollständige Kreis um *T* mit Radius $\frac{1}{2} \cdot \overline{MM_c} = \frac{1}{2} \cdot \overline{MM_a}$, also der Thaleskreis über der Strecke MM_a.

3. Beweisvorschlag:

Sind die Sehnen *AB* und *CD* in einem Kreis gleich lang, so gibt es eine Spiegelachse durch den Mittelpunkt *M*, die den Kreis in sich überführt und *AB* auf *CD* abbildet.

Die Mittelpunkte der beiden Strecken werden bei der Spiegelung aufeinander abgebildet. Die Verbindungsstrecke der Mittelpunkte M_a und M_c steht senkrecht auf der Spiegelachse und der Mittelpunkt der Verbindungsstrecke - also *P* - liegt auf dieser Achse.
Wenn $P \neq M_a$ und $P \neq M$ dann ist also der Winkel $\sphericalangle M_aPM$ ein rechter Winkel. Da die Punkte M_a und *M* fest sind, liegt *P* also nach der Umkehrung des Thalessatzes auf dem Thaleskreis über der Strecke MM_a. Wenn $P = M_a$ oder $P = M$, so liegt *P* natürlich ebenfalls auf dem Thaleskreis über MM_a.

Dass umgekehrt jeder Punkt *P* des Thaleskreises über MM_a tatsächlich auch Mittelpunkt einer Verbindungsstrecke M_cM_a ist, wird wie im ersten Beweisvorschlag gezeigt.

Aufgabe 5

Zocker-Detlef besucht ein Spielcasino. Er setzt bei jedem Spiel den gleichen Anteil des Geldes, das er im Moment hat. Gewinnt er, dann erhält er seinen Einsatz zurück und zusätzlich den gleichen Betrag nach einmal. Verliert er, so hat er seinen Einsatz verspielt.

Als Zocker-Detlef wieder aus dem Spielcasino kommt, hat er gleich viele Spiele gewonnen wie verloren. Über die Reihenfolge von Gewinn und Verlust ist nichts bekannt.

Hat er insgesamt Gewinn oder Verlust gemacht?

Beispiele:

Detlef setzt immer 10 % seines momentanen Besitzes. Er begann mit 100 € Kapital. Wenn er viermal gespielt hat und zuerst zweimal gewonnen hat, so entwickelte sich sein Besitz von Spiel zu Spiel so:
100 € → 110 € → 121 € → 108,90 € → 98,01 €.
Wenn er abwechselnd verloren und gewonnen und zwar zunächst verloren hat, so entwickelte sich sein Besitz von Spiel zu Spiel so:
100 € → 90 € → 99 € → 89,10 € → 98,01 €.
In den Beispielen verlor Detlef unabhängig von der Reihenfolge gleich viel. Deshalb vermutet man, dass er immer verliert. Dies muss man allgemein zeigen.

Lösung:

Zocker-Detlef hat insgesamt Verlust gemacht.

Beweis:

Mit q bezeichnen wir den (relativen) Anteil des Geldes, den Zocker-Detlef von dem Geld, das er im Moment hat, einsetzt. Da er etwas einsetzt, aber auch nicht mehr einsetzen kann, als er momentan hat, gilt: $0 < q \leq 1$. Im Beispiel ist $q = 0{,}1$.

Bezeichnet man den Geldbetrag, den er vor einem Spiel besitzt, mit x, so ist sein Einsatz beim nächsten Spiel $q \cdot x$.

Gewinnt er dieses, so besitzt er vor dem kommenden Spiel den Betrag $x + qx = (1+q)x$;
verliert er dieses, so besitzt er vor dem kommenden Spiel den Betrag $x - qx = (1-q)x$.

Daraus folgt:
„Gewinnen“ bedeutet Multiplikation des momentanen Geldbetrages mit dem Faktor $1+q$;
„Verlieren“ bedeutet Multiplikation des momentanen Geldbetrages mit dem Faktor $1-q$.

Ist K das Anfangskapital von Zocker-Detlef vor dem ersten Spiel, so besitzt er nach n gewonnenen und n verlorenen Spielen das Endkapital $E = p \cdot K$, wobei p ein Produkt mit n Faktoren $1+q$ und n Faktoren $1-q$ ist.

Da nach dem Kommutativgesetz für die Multiplikation in einem Produkt die Reihenfolge der Faktoren beliebig geändert werden kann, ohne dass sich der Wert des Produkts ändert, kann man die Faktoren im Produkt p so sortieren, dass zunächst die n Faktoren $1+q$ kommen, dann die n Faktoren $1-q$. Somit gilt:

$$p = (1+q)^n (1-q)^n = \left[(1+q)(1-q)\right]^n = \left(1-q^2\right)^n$$

Da $0 < q \leq 1$ ist $0 \leq 1 - q^2 < 1$ und somit auch $p = \left(1-q^2\right)^n < 1$.

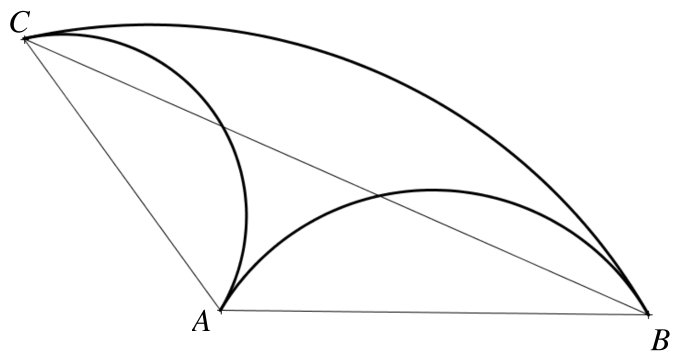
Folglich ist $E = p \cdot K < K$ und Zocker-Detlef hat am Ende also weniger Besitz als zu Beginn. Er hat insgesamt Verlust gemacht.

Aufgabe 6

Drei Kreisbögen bilden ein Dreibogeneck ABC, wenn sie auf Kreisen liegen, die sich in den Punkten A, B bzw. C berühren. Dabei sind nur Kreisbögen zugelassen, die in der Zeichenebene liegen und deren Mittelpunktswinkel kleiner als 180° sind.

Gegeben sind nun die Eckpunkte A, B und C eines Dreiecks, das nicht rechtwinklig ist.

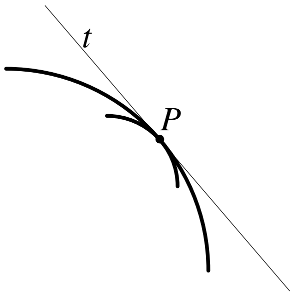
Konstruiere das zugehörige Dreibogeneck.



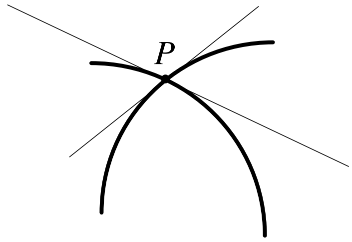
Vorbemerkungen:

a) Zwei Kreisbögen *berühren* sich im gemeinsamen Punkt *P*, wenn es in *P* eine *gemeinsame* Tangente *t* an beide Kreisbögen gibt.
Wenn die beiden Tangenten an die beiden Kreisbögen durch *P* nicht zusammenfallen, so *schneiden* sich die beiden Kreisbögen, sie *berühren* sich jedoch *nicht.*

Kreisbögen *berühren* sich:



Kreisbögen *schneiden* sich, aber *berühren* sich *nicht*:



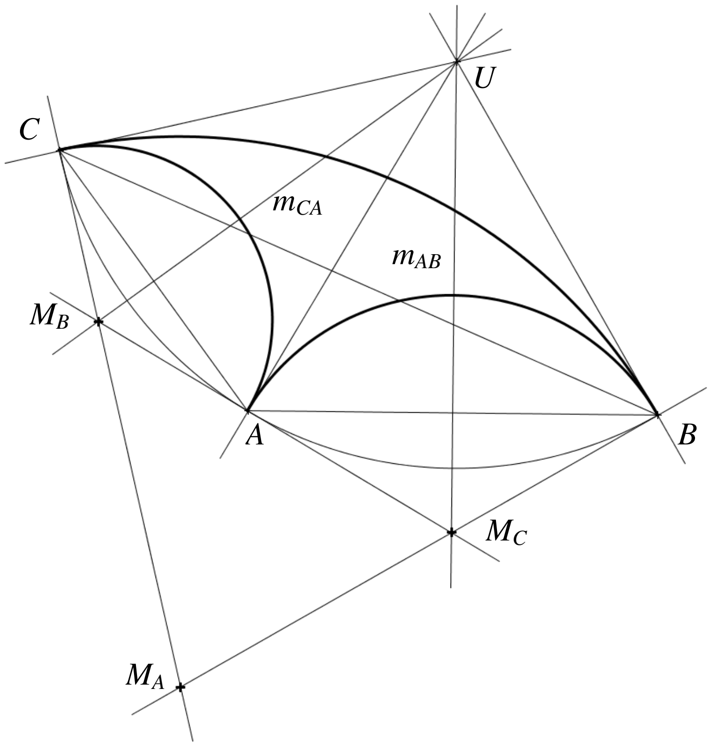
b) Wir bezeichnen mit

- *U* den Umkreismittelpunkt des Dreiecks *ABC*,
- m_{AB}, m_{BC} und m_{CA} die Mittelsenkrechten der Strecken *AB*, *BC* bzw. *CA*,
- M_A, M_B und M_C die Mittelpunkte der Kreise zu den gesuchten Kreisbögen durch *B* und *C*, *A* und *C* bzw. *A* und *B*.

Lösung:

Beschreibung der Konstruktion:

m_{AB} und m_{CA} schneiden sich im Umkreismittelpunkt *U* des Dreiecks *ABC*.
Das Lot auf *UA* durch *A* und das Lot auf *UB* durch *B* schneiden sich in M_C.
Analog schneiden sich das Lot auf *UA* durch *A* und das Lot auf *UC* durch *C* in M_B; entsprechend das Lot auf *UB* durch *B* und das Lot auf *UC* durch *C* in M_A.
Die Lote sind die Tangenten an den Umkreis des Dreiecks *ABC* in den Punkten *A*, *B*, *C*. Um die Mittelpunkte werden dann die Kreise durch *A*, *B* und *C* gezeichnet.



Beweis:

Die Konstruktion ist immer durchführbar:
Da das Dreieck ABC nach Voraussetzung nicht rechtwinklig ist, liegt U auf keiner der Dreiecksseiten (Satz des Thales). Damit fallen keine zwei der drei Geraden (UA), (UB) und (UC) aufeinander, insbesondere sind keine zwei der drei Geraden parallel. Damit sind auch keine zwei der verwendeten Lote parallel. Daher existieren die Schnittpunkte M_A, M_B und M_C dieser Lote.

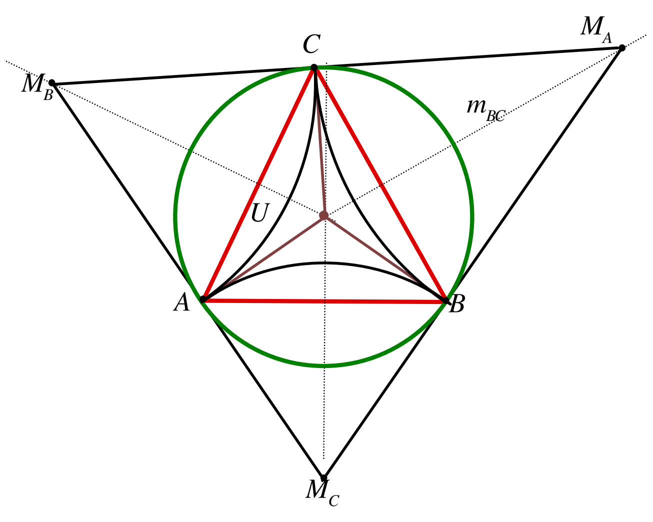
Die Konstruktion führt zu einem Ergebnis, das die Bedingungen der Aufgabe erfüllt:
Der Umkreismittelpunkt U liegt auf m_{AB}, also liegen UA und UB und damit auch die beiden verwendeten Lote achsensymmetrisch bezüglich m_{AB}. Der Schnittpunkt M_C der beiden Lote liegt also ebenfalls auf m_{AB}. Damit gehen alle Kreisbögen mit Mittelpunkt M_C, die durch A gehen, auch durch B.
Entsprechend gehen alle Kreisbögen mit Mittelpunkt M_A (bzw. M_B), die durch B (bzw. C) gehen, auch durch C (bzw. A).
Nach Konstruktion ist $\sphericalangle UBM_C = \sphericalangle UBM_A = 90°$; damit ist (UB) eine Tangente im Punkt B und zwar sowohl an den Kreis um M_C mit Radius $\overline{M_CB}$ als auch an den Kreis um M_A mit dem Radius $\overline{M_AB}$. Zwei Kreise berühren sich aber gegenseitig im Punkt B, wenn sie im Punkt B eine gemeinsame Tangente haben (siehe Vorbemerkung a)). Somit berühren sich die beiden Kreise in B.
Entsprechend ist (UC) eine gemeinsame Tangente in C an die Kreise um M_A und M_B, also berühren sich diese beiden Kreise in C. Schließlich ist analog (UA) eine gemeinsame Tangente in A an die Kreise um M_C und M_B, also berühren sich diese Kreise in A.

Bemerkungen:

A) Die Konstruktion ist eindeutig, d.h. sie führt zum einzig möglichen Ergebnis

Vorbemerkung: Dazu muss gezeigt werden, dass z.B. der Mittelpunkt M_C des Kreisbogens durch A und B eindeutig bestimmt ist durch seine Lage auf der Mittelsenkrechten m_{AB} und der Tangenten an den Umkreis in A, so wie es in der Konstruktion beschrieben wurde. Dazu zeigt man, dass der Umkreis von ABC der Inkreis von $M_AM_BM_C$ sein muss.

1. Fall: Das gegebene Dreieck ABC ist spitzwinklig. In diesem Fall liegt der Umkreismittelpunkt U innerhalb des Dreiecks. Die Punkte M_A, M_B und M_C seien die Mittelpunkte der Kreisbögen eines Dreibogenecks zum Dreieck ABC. Der Mittelpunkt M_A des Kreisbogens durch B und C muss auf der Mittelsenkrechten m_{BC} von BC liegen, da M_A von B und C gleich weit entfernt ist. Außerdem muss der Mittelpunkt M_B auf der Geraden (M_AC) liegen, denn die Radien M_AC und M_BC sind orthogonal zu derselben Tangente an die beiden sich berührenden Kreisbögen in C.



Somit liegen die Punkte *A, B* und *C* auf den Seiten des Dreiecks $M_AM_BM_C$. Da *B* und *C* symmetrisch zur Mittelsenkrechten m_{BC} durch M_A liegen, ist m_{BC} Winkelhalbierende des Innenwinkels bei M_A im Dreieck $M_AM_BM_C$. Analog sind auch m_{AC} und m_{AB} Winkelhalbierende der Innenwinkel im Dreieck $M_AM_BM_C$. Die Winkelhalbierenden der Innenwinkel schneiden sich aber im Inkreismittelpunkt des Dreiecks, der Umkreismittelpunkt *U* von *ABC* ist also Inkreismittelpunkt von $M_AM_BM_C$. Somit muss M_C auf der Tangente an den Umkreis in *A* liegen, genauso, wie es in der Konstruktion beschrieben wurde.

2. Fall: Das gegebene Dreieck *ABC* hat einen stumpfen Winkel, wir nehmen an dieser Winkel sei der Winkel α bei A. Dieser Fall ist in der ersten Zeichnung dargestellt.
Der Beweis verläuft analog wie im ersten Fall, allerdings sind nun die Mittelsenkrechten m_{AC} und m_{AB} die Winkelhalbierenden der Außenwinkel bei M_B bzw. M_C im Dreieck $M_AM_CM_B$. Dementsprechend ist der Umkreis des Dreiecks *ABC* ein Ankreis des Dreiecks $M_AM_CM_B$. Wieder muss daher M_C auf der Tangente an den Umkreis in *A* liegen, genauso, wie es in der Konstruktion beschrieben wurde.

B) Der Fall eines rechtwinkligen Dreiecks

Falls die Punkte *A*, *B* und *C* ein rechtwinkliges Dreieck bilden, entartet der Kreisbogen, der die Eckpunkte der Hypotenuse verbindet, zu einer geraden Strecke.