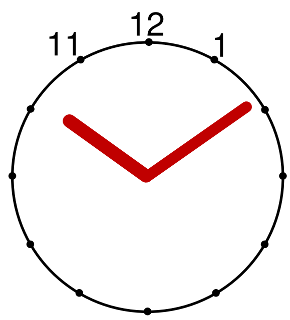
Landeswettbewerb Mathematik
Baden-Württemberg
Musterlösungen 1. Runde 2019/2020

Aufgabe 1

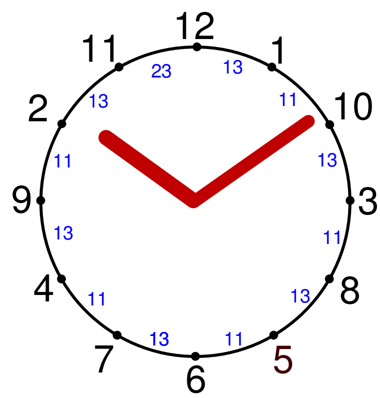


Tabea möchte die zwölf Zahlen auf einer Uhr so umsortieren, dass die Summe benachbarter Zahlen immer eine zweistellige Primzahl ist. Die 11, die 12 und die 1 lässt sie an den angestammten Plätzen stehen.

Bestimme, welche Zahlen sich nach einer solchen Umordnung an ihrem angestammten Platz befinden können.

Lösung:

Es gibt nur eine mögliche Umordnung der Zahlen an der Uhr, bei der die Angaben der Aufgabenstellung erfüllt sind. Es ist die in der Abbildung dargestellte Anordnung. Bei dieser Umordnung bleiben acht Zahlen an ihrem u(h)rsprünglichen Uhrenplatz: 1,3,5,6,7,9,11 und 12.

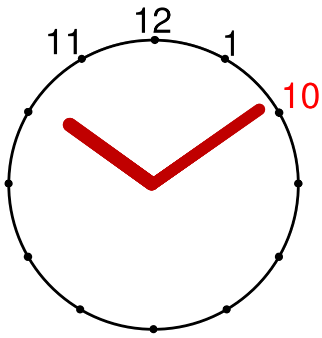


1. Beweisvorschlag (alle möglichen Nachbarn untersuchen):

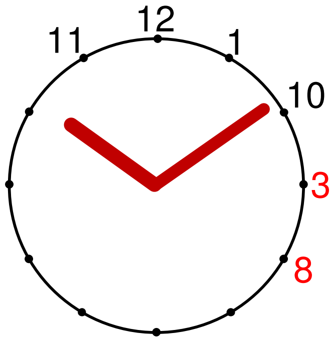
In der folgenden Tabelle sind alle möglichen Nachbarn der Zahlen an der Uhr aufgelistet:

Zahl	mögliche Nachbarn	Summe benachbarter Zahlen
1	10,12	11, 13
2	9,11	11, 13
3	8,10	11, 13
4	7,9	11, 13
5	6,8,12	11, 13, 17
6	5,7,11	11, 13, 17
7	4,6,10,12	11, 13, 17, 19
8	3,5,9,11	11, 13, 17, 19
9	2,4,8,10	11, 13, 17, 19
10	1,3,7,9	11, 13, 17, 19
11	2,6,8,12	13, 17, 19, 23
12	1,5,7,11	13, 17, 19, 23

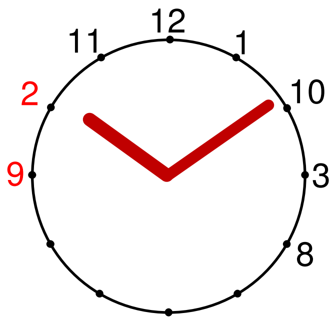
(1) Man erkennt aus dieser Tabelle: 1 hat als mögliche Nachbarn nur 12 und 10. Die 1 muss also zwischen 10 und 12 stehen. Da die 1 und die 12 schon vorgegeben sind, muss am ursprünglichen Platz der 2 nun die 10 stehen (siehe nebenstehende Abbildung).



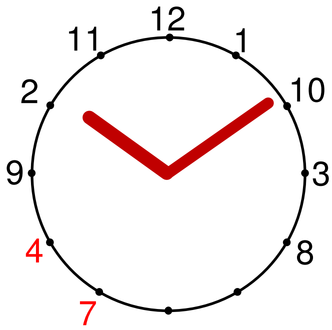
(2) Ebenso erkennt man an der Tabelle, dass die 3 zwischen 8 und 10 stehen muss. Da die 10 schon ihren Platz hat, muss im Uhrzeigersinn also 3 und 8 folgen.



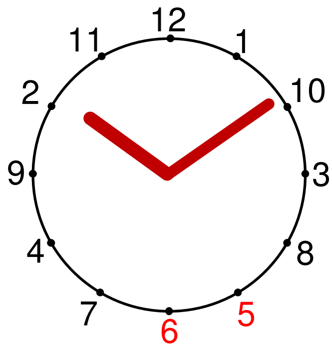
(3) Ebenso muss die 2 zwischen 11 und 9 stehen. Da die 11 schon ihren Platz hat, muss nun gegen den Uhrzeigersinn nach der 11 die 2 und die 9 an der Uhr stehen.



(4) Schließlich muss 4 zwischen 7 und 9 stehen. Auf die bereits eingetragene 9 muss also gegen den Uhrzeigersinn die 4 und die 7 folgen.



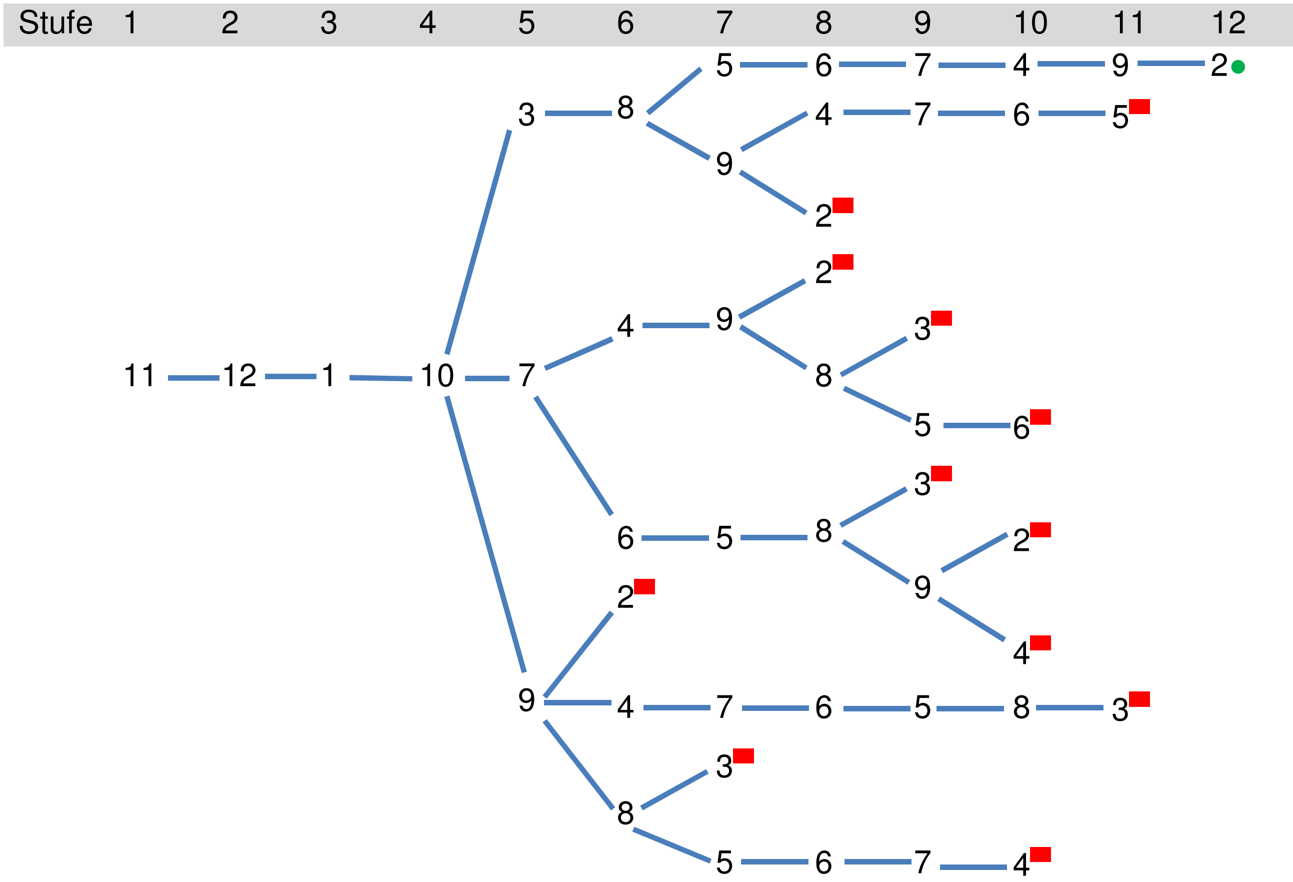
(5) Es fehlen nur noch die Zahlen 5 und 6. Da nicht zwei gerade Zahlen benachbart sein können, muss die 5 neben der 8 und die 6 neben der 7 stehen.



Damit sind alle Zahlen auf eindeutige Weise an die Uhr geschrieben. Es gibt nur eine Lösung für die Aufgabenstellung.
Durch Nachrechnen überprüft man, dass alle Summen benachbarter Zahlen zweistellige Primzahlen ergeben.
Bei dieser Lösung sind acht Zahlen an ihrem Uhrenplatz: 1,3,5,6,7,9,11 und 12.

2. Beweisvorschlag (mit Baumdiagramm):

Im Baumdiagramm startet man bei den vorgegebenen Zahlen 11,12 und 1. Dann folgen in der nächsten Stufe alle die Zahlen, die nach Aufgabenstellung Nachbarn der vorigen Zahl sein können (also als Summe eine zweistellige Primzahl ergeben) und nicht zuvor schon im selben Ast verbraucht wurden. Sobald neben einer Zahl kein weiterer Nachbar mehr möglich ist, wurde das im Baum mit ▬ markiert.

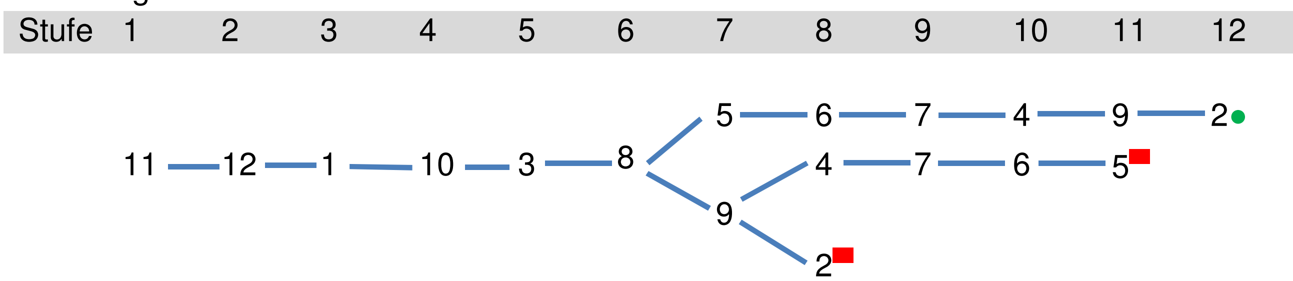


Man erkennt, dass nur ein Ast über alle Stufen führt, es ist der oberste Ast. Seine Zahlen führen zu der in der Lösung

12-1-10-3-8-5-6-7-4-9-2-11-12

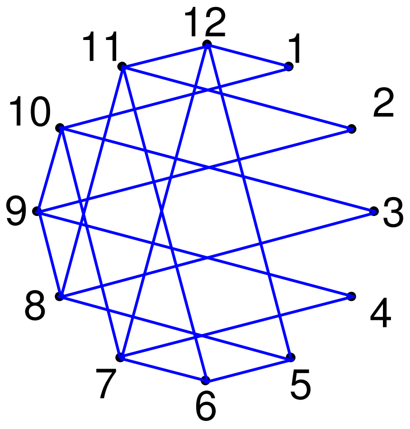
angegebenen Anordnung an der Uhr. Bei dieser Lösung sind acht Zahlen an ihrem Uhrenplatz: 1,3,5,6,7,9,11 und 12.

Variante:
Der Baum vereinfacht sich wesentlich, wenn man benutzt, dass die 3 neben der 10 stehen muss, dass also auf die 10 unbedingt die 3 folgen muss.
Dann ergibt sich der verkürzte Baum:

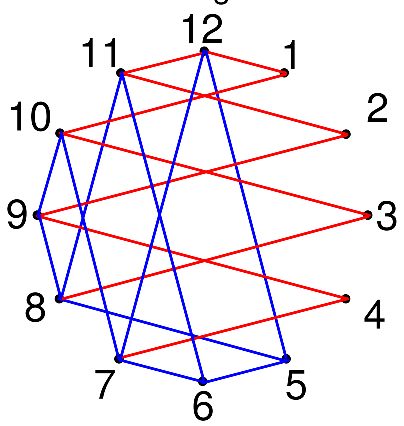


3. Beweisvorschlag (vollständige Tour im Graph):

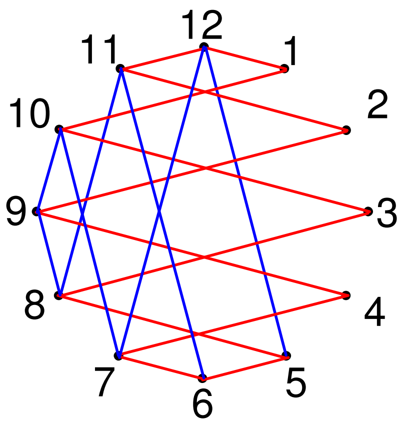
Zwei Zahlen an der Uhr werden miteinander verbunden, wenn ihre Summe eine zweistellige Primzahl (11,13,17,19,23) ergibt:



Man sucht nun eine vollständige Tour durch diese Verbindungslinien, die durch jede Zahl genau einmal hindurchführt. Die Verbindung von 11 mit 12 muss in der Tour auf jeden Fall vorkommen, da diese Zahlen nach Aufgabenstellung nebeneinander stehen. Die rot markierten Verbindungslinien müssen in dieser Tour ebenfalls auf jeden Fall vorkommen, da sonst die 1 oder 2 oder 3 oder 4 ausgelassen wird:



- Die Verbindung 8-5 muss vorkommen, da 8-11 und 8-9 nicht möglich sind, da 9 und 11 schon jeweils mit zwei Zahlen verbunden sind.
- Ebenso muss die Verbindung 7-6 vorkommen, da 7-12 und 7-10 unmöglich sind.
- Es bleibt nur noch 5-6 als einzige Möglichkeit übrig damit eine vollständige Tour entsteht:

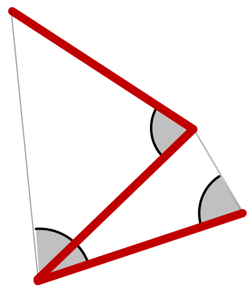


Die Zahlen auf der Tour (beginnend mit 1) sind

1-10-3-8-5-6-7-4-9-2-11-12-1

Ordnet man diese Zahlen auf der Uhr im Uhrzeigersinn an, so entsteht die angegebene Lösung.

Aufgabe 2



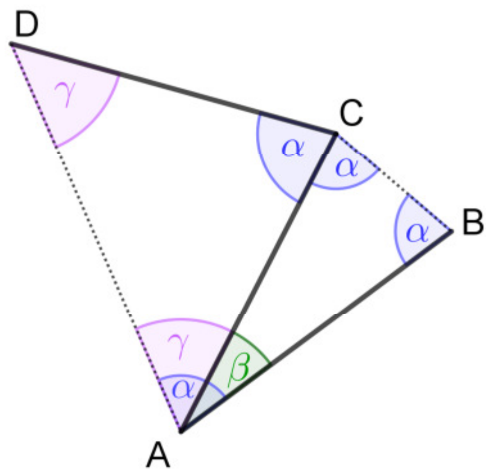
Drei gleich lange Stäbe werden wie in der Abbildung so gelegt, dass die markierten Winkel gleiche Größe haben.

Bestimme diese Größe.

Lösung:

Der gesuchte Winkel hat die Weite $\frac{540°}{7} = 77\frac{1}{7}°$

Beweisvorschlag (über gleichschenklige Dreiecke):



Die drei gleich langen Stäbe gehören zu gleichlangen Strecken, deren Endpunkte wie in der nebenstehenden Zeichnung mit A,B,C und D bezeichnet sind. Die Weite der drei markierten und gleich weiten Winkel sei mit α bezeichnet.

Da die Strecken AB und AC gleich lang sind, ist das Dreieck ABC gleichschenklig mit Spitze A.
Die Basiswinkel haben also beide die gleiche Weite α. Nach Winkelsummensatz gilt für die Weite β des Winkels an der Spitze: $\beta = 180° - 2\alpha$.
Da die Strecken AC und CD gleich lang sind, ist das Dreieck ACD gleichschenklig mit Spitze C und Basis AD. Der Winkel an der Spitze ist markiert, hat also nach Aufgabenstellung die Weite α. Für die beiden gleich weiten Basiswinkel γ in diesem Dreieck gilt nach dem Winkelsummensatz: $2\gamma + \alpha = 180°$.
Löst man diese Gleichung nach γ auf, so ergibt sich

$$\gamma = \frac{180° - \alpha}{2} = 90° - \frac{\alpha}{2}$$

Die Winkel β und γ am Punkt A ergänzen sich zum markierten Winkel der Weite α, also $\beta + \gamma = \alpha$. Setzt man nun $\beta = 180° - 2\alpha$ und $\gamma = 90° - \frac{\alpha}{2}$ ein, so ergibt sich

$$(180° - 2\alpha) + \left(90° - \frac{\alpha}{2}\right) = \alpha$$

Vereinfacht man den Term auf der linken Seite, so ergibt sich $270° - \frac{5}{2}\alpha = \alpha$. Addiert man auf beiden Seiten der Gleichung $\frac{5}{2}\alpha$ so folgt $\frac{7}{2}\alpha = 270°$ oder

$$\alpha = \frac{2}{7} \cdot 270° = \frac{540°}{7} = 77\frac{1}{7}°$$

Das ist das gesuchte Ergebnis.

Aufgabe 3

Paul entdeckt eine positive ganze Zahl mit einer merkwürdigen Eigenschaft: Man kann ihre Ziffern in einer neuen Reihenfolge so anordnen, dass die dadurch neu gebildete Zahl das Dreifache der ursprünglichen Zahl ist.

Beweise: Die neue Zahl ist durch 27 teilbar.

Beweisvorschlag (mit Teilbarkeitsregeln für 3 und 9):

Vorbemerkungen: Man benutzt bei diesem Beweis die folgenden bekannten Regeln zur Teilbarkeit einer Zahl n durch durch 3 bzw. 9:
(1) Wenn die Quersumme $QS(n)$ von n durch 3 teilbar ist, so ist auch n durch 3 teilbar.
(2) Umgekehrt: Wenn die Zahl n durch 3 teilbar ist, so ist auch ihre Quersumme $QS(n)$ durch 3 teilbar.
(3) Wenn die Quersumme $QS(n)$ von n durch 9 teilbar ist, so ist auch n durch 9 teilbar.
(4) Umgekehrt: Wenn die Zahl n durch 9 teilbar ist, so ist auch ihre Quersumme $QS(n)$ durch 9 teilbar.

Die Zahl, die Paul entdeckt hat, sei mit z bezeichnet.
Man kann die Ziffern von z so in einer neuen Reihenfolge anordnen, dass eine neue Zahl $\tilde{z}$ entsteht, für die nach Aufgabenstellung gilt:

$$\tilde{z} = 3 \cdot z$$

Somit ist die neue Zahl $\tilde{z}$ durch 3 teilbar. Nach der Vorbemerkung (2) ist auch die Quersumme $QS(\tilde{z})$ durch 3 teilbar.
Nun ist aber $\tilde{z}$ aus z durch eine Umordnung der Ziffern entstanden. Somit bestehen z und $\tilde{z}$ aus genau den gleichen Ziffern. Insbesondere ist also auch die Summe ihre Ziffern genau gleich groß, d.h. z und $\tilde{z}$ haben die gleiche Quersumme:

$$QS(z) = QS(\tilde{z}).$$

Da $QS(\tilde{z})$ durch 3 teilbar ist, ist auch $QS(z)$ durch 3 teilbar. Aus Vorbemerkung (1) folgt, dass auch z durch 3 teilbar ist, d.h. es gibt eine positive ganze Zahl y mit $z = 3 \cdot y$.
Setzt man dies in $\tilde{z} = 3 \cdot z$ ein, so ergibt sich $\tilde{z} = 3 \cdot (3 \cdot y) = 9 \cdot y$.

Somit ist $\tilde{z}$ durch 9 teilbar. Nach Vorbemerkung (4) ist auch $QS(\tilde{z})$ durch 9 teilbar.
Aus $QS(z) = QS(\tilde{z})$ folgt, dass auch $QS(z)$ durch 9 teilbar ist. Aus Vorbemerkung (3) ergibt sich, dass z durch 9 teilbar ist, d.h. es gibt eine positive ganze Zahl x mit $z = 9 \cdot x$.
Setzt man dies in $\tilde{z} = 3 \cdot z$ ein, so ergibt sich

$$\tilde{z} = 3 \cdot (9 \cdot x) = 27 \cdot x.$$

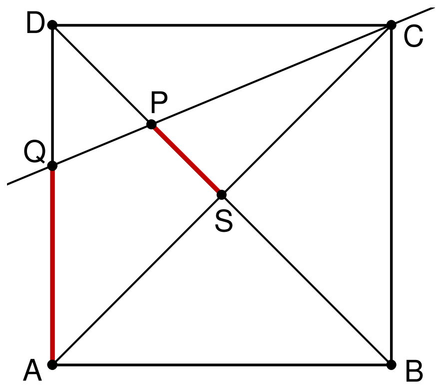
Somit ist also die neue Zahl $\tilde{z}$ durch 27 teilbar. Das war zu beweisen.

Bemerkung: Es stellt sich die Frage, ob es eine Zahl z mit der Eigenschaft der Aufgabenstellung überhaupt gibt. Das kleinste Beispiel ist die Zahl $z = 1035$. Dann gilt für die neue Zahl $\tilde{z} = 3105$: $3105 = 3 \cdot 1305$. $\tilde{z}$ ist durch eine Umordnung der Ziffern von z entstanden. Es ist $3105 = 27 \cdot 115$. Also ist die neue Zahl $\tilde{z} = 3105$ durch 27 teilbar.
Es gibt unendlich viele Beispiele: z.B. $z = 10 \ldots 035$.

Aufgabe 4

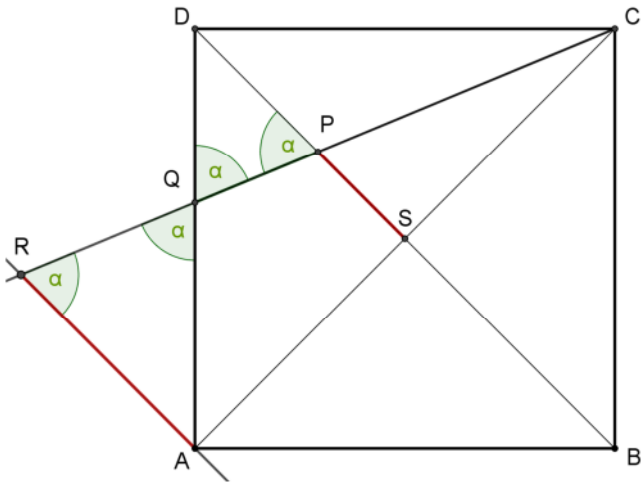
Gegeben ist das Quadrat ABCD mit Diagonalenschnittpunkt S.
Eine Gerade durch C, die nicht durch D verläuft, schneidet die Diagonale BD im Punkt P und die Seite AD im Punkt Q so, dass die Strecken DP und DQ gleiche Länge haben.

Zeige: Die Strecke AQ ist doppelt so lang wie die Strecke SP.



1. Beweisvorschlag (mit Mittelparallele):

Zunächst zeichnet man die Parallele zur Diagonale DB durch den Punkt A. Der Schnittpunkt dieser Parallele mit der Geraden durch C und Q sei R.

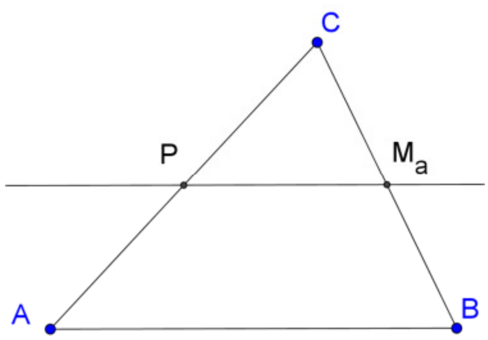


Das Dreieck QPD ist nach Aufgabenstellung gleichschenklig mit Basis QP und Spitze D. Die beiden Basiswinkel sind daher gleich weit. Ihre Weite sei α.

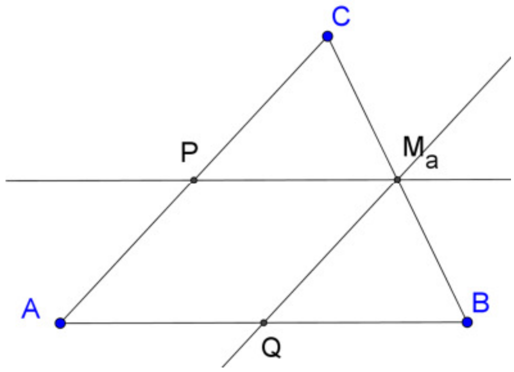
Im Dreieck AQR haben die beiden Innenwinkel ∢RQA und ∢ARQ ebenfalls die Weite α:
∢RQA ist Scheitelwinkel zu ∢PQD $= \alpha$ und ∢ARQ ist Wechselwinkel an Parallelen zu ∢DPQ $= \alpha$. Somit ist das Dreieck AQR gleichschenklig und $\overline{AR} = \overline{AQ}$.

Da S als Diagonalenschnittpunkt Mittelpunkt der Diagonale AC ist, ist SP Mittelparallele im Dreieck ACR. Nach dem bekannten Satz über die Mittelparallele im Dreieck gilt $\overline{AR} = 2 \cdot \overline{SP}$. Da $\overline{AR} = \overline{AQ}$ folgt die Behauptung $\overline{AQ} = 2 \cdot \overline{SP}$.

Bemerkung: Dieser Beweis benutzt die folgende bekannte Tatsache: Ist M_a der Mittelpunkt der Seite BC eines Dreiecks ABC und ist $\overline{PM_a}$ parallel zur Seite AB, so $\overline{AB} = 2 \cdot \overline{PM_a}$ (Satz von der Mittelparallele im Dreieck).
Der Satz ergibt sich sofort aus dem zweiten Strahlensatz. Er kann aber auch ohne

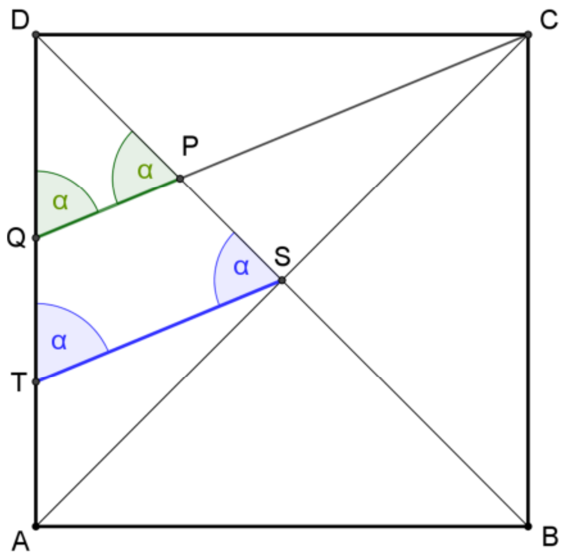


Strahlensatz bewiesen werden:
Die Parallele zu AC durch M_a schneide AB in Q. Aufgrund von Stufenwinkeln an Parallelen haben die Dreiecke PM_aC und QBM_a gleiche Innenwinkel. Da die Seiten CM_a und M_aB gleich lang sind, sind diese Dreiecke nach dem Kongruenzsatz WSW kongruent. Insbesondere sind QB und PM_a gleich lang. Da das Viereck AQM_aP ein Parallelogramm ist, ist auch AQ und PM_a gleich lang. Daher $\overline{AB} = 2 \cdot \overline{PM_a}$.



2. Beweisvorschlag (mit 1. Strahlensatz):

Zunächst zeichnet man die Parallele zur Strecke QP durch den Punkt S ein. Der Schnittpunkt dieser Parallele mit der Quadratseite AD sei der Punkt T.



Das Dreieck QPD ist nach Aufgabenstellung gleichschenklig mit Basis QP und Spitze D. Die beiden Basiswinkel sind daher gleich weit. Ihre Weite sei α.
Da ST parallel zu PQ ist, ist auch die Weite des Winkels ∢STD gleich α, denn es ist ein Stufenwinkel an Parallelen.
Ebenso ∢DST = α.

Das Dreieck TSD hat also zwei gleich große Innenwinkel. Es ist somit nach dem Basiswinkelsatz ebenfalls ein gleichschenkliges Dreieck mit Spitze S und Basis ST. Die beiden Schenkel TD und SD sind gleich lang.

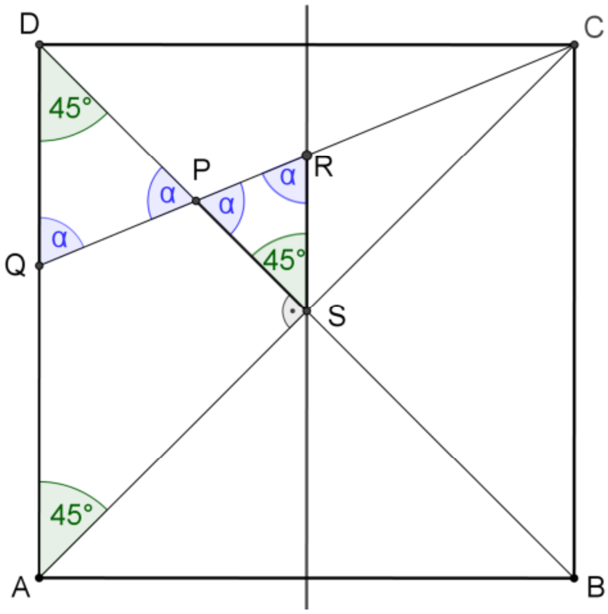
Aus $\overline{TD} = \overline{SD}$ und $\overline{QD} = \overline{PD}$ folgt
$$\overline{TQ} = \overline{TD} - \overline{QD} = \overline{SD} - \overline{PD} = \overline{SP}$$
also $\overline{TQ} = \overline{SP}$.

Die beiden vom Punkt A ausgehenden Strahlen AC und AQ werden von den Parallelen QC und TS geschnitten. Man kann also die Strahlensätze auf diese Figur anwenden.
Nach dem 1. Strahlensatz gilt $\frac{\overline{AS}}{\overline{SC}} = \frac{\overline{AT}}{\overline{TQ}}$.
Der Punkt S ist der Mittelpunkt der beiden Diagonalen des Quadrats. also $\overline{AS} = \overline{SC}$.
Somit $1 = \frac{\overline{AS}}{\overline{SC}} = \frac{\overline{AT}}{\overline{TQ}}$. Daraus folgt $\overline{AT} = \overline{TQ}$.

Daraus ergibt sich $\overline{AQ} = \overline{AT} + \overline{TQ} = 2 \cdot \overline{TQ} = 2 \cdot \overline{SP}$. Das war zu zeigen.

3. Beweisvorschlag (mit 2. Strahlensatz):

Da das Dreieck PDQ nach Aufgabenstellung gleichschenklig mit Basis QP ist, sind die beiden Basiswinkel gleich weit. Wir bezeichnen diese Weite mit α. Die Diagonalen bilden mit den Seiten eines Quadrats den Winkel 45°.



Die Parallele zur Seite AD durch S schneidet CQ im Punkt R. Für die Winkel im Dreieck RPS ergibt sich:

- $\sphericalangle SPR$ ist Scheitelwinkel zu $\sphericalangle DPQ$, also $\sphericalangle SPR = \alpha$.
- $\sphericalangle PRS$ ist Wechselwinkel zu $\sphericalangle PQD$ an Parallelen, also $\sphericalangle PRS = \alpha$.

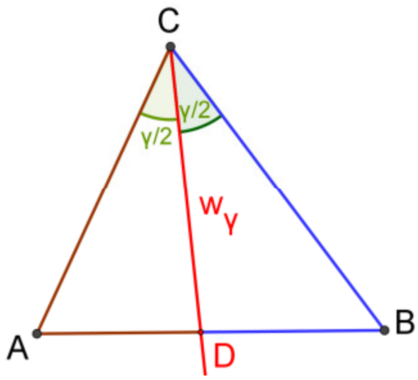
Somit ist das Dreieck RPS ebenfalls gleichschenklig und es gilt $\overline{SP} = \overline{SR}$.

Da sich in einem Quadrat die Diagonalen gegenseitig halbieren, ist S der Mittelpunkt der Diagonalen AC, also $\overline{AC} = 2 \cdot \overline{SC}$.
Die beiden vom Punkt C ausgehenden Strahlen CQ und CA werden von den Parallelen RS und QA geschnitten. Man kann also die Strahlensätze auf diese Figur anwenden.

Aus dem 2. Strahlensatz an, so folgt $\frac{\overline{AQ}}{\overline{SR}} = \frac{\overline{AC}}{\overline{SC}} = 2$, also $\overline{AQ} = 2 \cdot \overline{SR}$.
Aus $\overline{SR} = \overline{SP}$ folgt nun $\overline{AQ} = 2 \cdot \overline{SR}$. Das war zu zeigen.

4. Beweisvorschlag (mit Winkelhalbierendensatz):

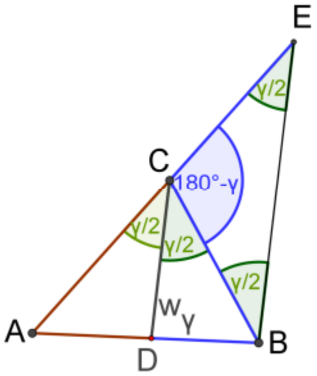
Vorbemerkung: Bei dem folgenden Beweisvorschlag wird der folgende Satz über Winkelhalbierende im Dreieck benutzt:



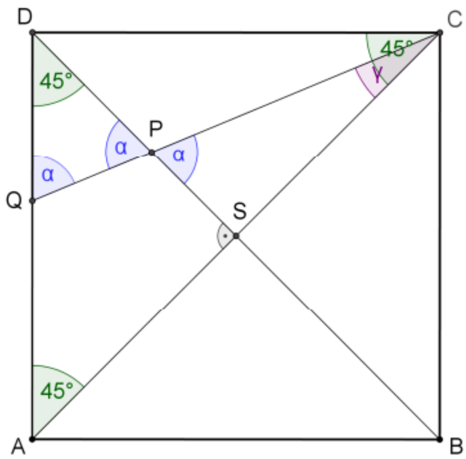
Satz (Winkelhalbierendensatz): In einem Dreieck teilt eine Winkelhalbierende die dem Winkel gegenüberliegende Seite im Verhältnis der beiden am Winkel anliegenden Seiten.
Genauer heißt das z.B. für die Winkelhalbierende w_γ von γ:

$$\frac{\overline{AD}}{\overline{DB}} = \frac{\overline{AC}}{\overline{BC}}$$

Dieser Satz ist bekannt und kommt in vielen Büchern über Geometrie vor. Zur Vollständigkeit wird hier ein Beweis angegeben.



Beweis des Winkelhalbierendensatzes:
Wie in der nebenstehenden Abbildung wird eine Parallele zur Winkelhalbierenden von γ durch B gezogen.
Der Schnittpunkt dieser Parallelen mit der Verlängerung von AC ergibt den Punkt E. Der Winkel ∢CEB ist Stufenwinkel von ∢ACD an Parallelen, er hat also ebenfalls die Weite $\frac{\gamma}{2}$.
Außerdem hat auch ∢EBC die Weite $\frac{\gamma}{2}$, denn dies ist ein Wechselwinkel an Parallelen zu ∢DCB $= \frac{\gamma}{2}$.
Somit ist das Dreieck BEC gleichschenklig und es folgt $\overline{CE} = \overline{BC}$.
Die beiden vom Punkt A ausgehenden Strahlen AE und AB werden von den Parallelen CD und EB geschnitten. Man kann also die Strahlensätze auf diese Figur anwenden.
Nach dem 1. Strahlensatz gilt $\frac{\overline{AD}}{\overline{DB}} = \frac{\overline{AC}}{\overline{CE}}$. Aus $\overline{CE} = \overline{BC}$ folgt $\frac{\overline{AD}}{\overline{DB}} = \frac{\overline{AC}}{\overline{BC}}$. Das war zu zeigen.



Nun zum eigentlichen Beweis der Aufgabe.
(1) Wir zeigen zunächst, dass CP den Winkel ∢DCS mit Weite 45° bei C halbiert:
Die Diagonalen AC und BD stehen aufeinander senkrecht und schließen mit den Quadratseiten Winkel der Weite 45° ein.
Daraus und aus der Tatsache, dass das Dreieck QPD gleichschenklig mit Basis QP ist, ergibt sich $2\alpha + 45° = 180°$ (Winkelsumme im Dreieck QPD), also $\alpha = 67{,}5°$.

Der Scheitelwinkel zu ∢DPQ hat die gleiche Weite $\alpha = 67{,}5°$, daher ergibt sich für die Winkelsumme im Dreieck PSC: $67{,}5° + 90° + \gamma = 180°$ und somit $\gamma = 22{,}5°$. Somit halbiert CP den 45°-Winkel bei C.

(2) Nun verwenden wir den in der Vorbemerkung vorgestellten Winkelhalbierendensatz zwei Mal:

- Angewandt auf das Dreieck SCD folgt aus diesem Satz $\frac{\overline{SP}}{\overline{PD}} = \frac{\overline{SC}}{\overline{DC}}$.
- Angewandt auf das Dreieck ACD folgt aus diesem Satz $\frac{\overline{AQ}}{\overline{QD}} = \frac{\overline{AC}}{\overline{DC}}$.

Da sich die Diagonalen im Quadrat gegenseitig halbieren, ist $\overline{AC} = 2 \cdot \overline{SC}$. Setzt man dies ein, so ergibt sich aus $\overline{PD} = \overline{QD}$:

$$\frac{\overline{AQ}}{\overline{QD}} = \frac{\overline{AC}}{\overline{DC}} = \frac{2 \cdot \overline{SC}}{\overline{DC}} = 2 \cdot \frac{\overline{SC}}{\overline{DC}} = 2 \cdot \frac{\overline{SP}}{\overline{PD}} = \frac{2 \cdot \overline{SP}}{\overline{PD}} = \frac{2 \cdot \overline{SP}}{\overline{QD}}$$

Vergleicht man den ersten und den letzten Bruch, so folgt $\overline{AQ} = 2 \cdot \overline{SP}$.
Dies war zu zeigen.

Aufgabe 5

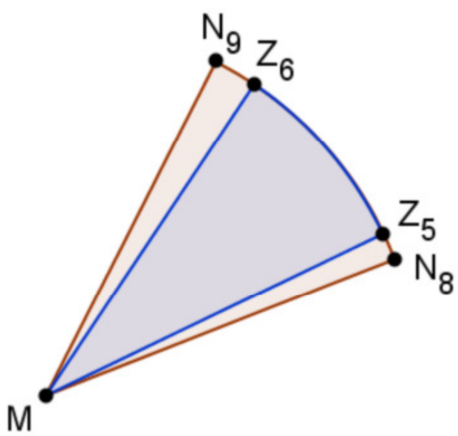
Auf einem Kreis liegen die Eckpunkte eines regelmäßigen 20-Ecks und die Eckpunkte eines regelmäßigen 19-Ecks so, dass diese den Kreis in 39 Kreisbögen zerlegen.

Zeige: Zu mindestens einem dieser Kreisbögen gehört ein Mittelpunktswinkel, der kleiner als 0,5° ist.

Vorbemerkung:
Wir bezeichnen die Eckpunkte des regelmäßigen 19-Ecks mit N_1, N_2, ... N_{19}, die Eckpunkte des regelmäßigen 20-Ecks mit Z_1, Z_2, ... Z_{20}. Diese 39 Punkte sind alle verschieden, denn nach Aufgabenstellung wird der Kreis in 39 Kreisbögen zerlegt.
Nach Voraussetzung wird der Kreis von N_1, N_2, ... N_{19} in 19 Kreisbögen mit dem jeweiligen Mittelpunktswinkel von $\frac{360°}{19} \approx 18{,}95°$ zerlegt. Durch Z_1, Z_2, ..., Z_{20} wird er in 20 Kreisbögen mit dem jeweiligen Mittelpunktswinkel von $\frac{360°}{20} = 18°$ zerlegt.

1. Beweisvorschlag (durch Schubfachprinzip):

Da die 20 Punkte Z_1, Z_2, ... Z_{20} auf die 19 Kreisbögen $\overset{\frown}{N_1N_2}$, $\overset{\frown}{N_2N_3}$, …, $\overset{\frown}{N_{19}N_1}$ verteilt werden, muss einer dieser 19 Kreisbögen zwei der Punkte Z_1, Z_2, ... Z_{20} enthalten. Diesen logischen Schluss bezeichnet man als „Schubfachprinzip“: Verteilt man 20 Gegenstände auf 19 Schubfächer, so müssen in mindestens einem Schubfach zwei (oder mehr) Gegenstände sein.



Wir nehmen an der Kreisbogen $\overset{\frown}{N_8N_9}$ enthalte zwei der Eckpunkte des Zwanzigecks. Diese beiden Punkte sind benachbarte Eckpunkte. Z.B. sind es die Punkte Z_5 und Z_6.

Die Summe der beiden Mittelpunktswinkel zu den Kreisbögen $\overset{\frown}{N_8Z_5}$ und $\overset{\frown}{Z_6N_9}$ hat die Weite $\frac{360°}{19} - \frac{360°}{20} = \frac{360°}{19} - 18° = \frac{360°}{19} - \frac{342°}{19} = \frac{18°}{19}$.

Wenn diese beiden Mittelpunktswinkel gleich groß sind, hat jeder die Größe $\frac{18°}{19} : 2 = \frac{9°}{19}$.
Wenn sie nicht gleich groß sind, so ist einer der beiden Winkel kleiner, der andere größer als $\frac{18°}{19} : 2 = \frac{9°}{19}$. In jedem Fall ist einer der beiden Mittelpunktswinkel höchstens $\frac{9°}{19}$.
Da $\frac{9°}{19} < 0{,}5°$ gibt also unter den 39 von den Eckpunkten des regelmäßigen 20-Ecks und des regelmäßigen 19-Ecks gebildeten Kreisbögen mindestens einen Kreisbogen, dessen Mittelpunktswinkel kleiner als 0,5° ist.

2. Beweisvorschlag (mit Widerspruch):

Annahme 1: Auf jedem der 19 Kreisbögen $\overset{\frown}{N_1N_2}$, $\overset{\frown}{N_2N_3}$, …, $\overset{\frown}{N_{19}N_1}$ liegt höchstens ein Punkt des 20-Ecks.
Diese Annahme führt zu einem Widerspruch, da dann höchstens 19 Punkte Eckpunkte des 20-Ecks auf dem Kreis liegen. Es müssen aber alle 20 Eckpunkte des 20-Ecks auf dem Kreis liegen.

Annahme 1 wurde also widerlegt. Es gibt also mindestens einen Kreisbogen des 19-Ecks, auf dem zwei Eckpunkte des Zwanzigecks liegen. Wir nehmen an, dass die Punkte Z_5 und Z_6 beide auf dem Kreisbogen $\overset{\frown}{N_8N_9}$ liegen. Die Situation ist in der Abbildung vom ersten Beweisvorschlag dargestellt.

Zu zwei Punkten A und B auf dem Kreis bezeichnen wir mit $\mu\left(\overset{\frown}{AB}\right)$ die Weite des Mittelpunktwinkels zum Kreisbogen $\overset{\frown}{AB}$. Dann gilt:

$$\mu\left(\overset{\frown}{N_8Z_5}\right)+\mu\left(\overset{\frown}{Z_5Z_6}\right)+\mu\left(\overset{\frown}{Z_6N_9}\right)=\mu\left(\overset{\frown}{N_8N_9}\right)$$

(vgl. Abbildung in Beweisvorschlag 1). Da $\mu\left(\overset{\frown}{Z_5Z_6}\right)=18°$ und $\mu\left(\overset{\frown}{N_8N_9}\right)=\frac{360°}{19}$ folgt daraus $\mu\left(\overset{\frown}{N_8Z_5}\right)+18°+\mu\left(\overset{\frown}{Z_6N_9}\right)=\frac{360°}{19}$.

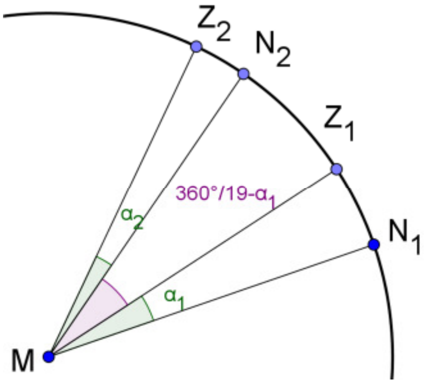
Annahme 2: Angenommen die beiden Mittelpunktswinkel $\mu\left(\overset{\frown}{N_8Z_5}\right)$ uns $\mu\left(\overset{\frown}{Z_6N_9}\right)$ sind beide mindestens 0,5°.
Nach dieser Annahme ist also $\mu\left(\overset{\frown}{N_8Z_5}\right)\geq 0{,}5°$ und $\mu\left(\overset{\frown}{Z_6N_9}\right)\geq 0{,}5°$. Daraus folgt
$\mu\left(\overset{\frown}{N_8Z_5}\right)+18°+\mu\left(\overset{\frown}{Z_6N_9}\right)\geq 0{,}5°+18°+0{,}5°=19°=\frac{361°}{19}>\frac{360°}{19}$. Dies widerspricht $\mu\left(\overset{\frown}{N_8Z_5}\right)+18°+\mu\left(\overset{\frown}{Z_6N_9}\right)=\frac{360°}{19}$. Somit ist Annahme 2 widerlegt.

Da Annahme 2 widerlegt ist, ist mindestens einer der beiden Mittelpunktswinkel $\mu\left(\overset{\frown}{N_8Z_5}\right)$ oder $\mu\left(\overset{\frown}{Z_6N_9}\right)$ kleiner als 0,5°. Es gibt also unter den 39 von den Eckpunkten des regelmäßigen 20-Ecks und des regelmäßigen 19-Ecks gebildeten Kreisbögen mindestens einen Kreisbogen, dessen Mittelpunktswinkel kleiner als 0,5° ist.

3. Beweisvorschlag (mit einer absteigenden Folge von Mittelpunktswinkeln):

Zu zwei Punkten A und B auf dem Kreis bezeichnen wir mit $\mu\left(\overset{\frown}{AB}\right)$ die Weite des Mittelpunktwinkels zum Kreisbogen $\overset{\frown}{AB}$.
Alle 39 Eckpunkte zusammen bilden die Eckpunkte eines 39-Ecks.
Man startet beim Eckpunkt N_1 dieses 39-Ecks und durchläuft den Kreis gegen den Uhrzeigersinn. Der nächste Eckpunkt ist ein Eckpunkt des 20-Ecks, o.B.d.A ist es der Eckpunkt Z_1. Würde auf N_1 nämlich der Eckpunkt N_2 des 19-Ecks folgen, so ergibt sich ein Widerspruch zu $\mu\left(\overset{\frown}{N_1N_2}\right)=\frac{360°}{19}>18°=\mu\left(\overset{\frown}{Z_1Z_2}\right)$.

Sei nun $\alpha_1=\mu\left(\overset{\frown}{N_1Z_1}\right)$. Für die Weite von α_1 gibt es drei Fälle:



Fall 1: $\alpha_1=\mu\left(\overset{\frown}{N_1Z_1}\right)>\frac{18°}{19}$. Dann liegen die Punkte auf dem Kreis, wie in der Abbildung dargestellt. Es ist

$$\alpha_2=\mu\left(\overset{\frown}{N_2Z_2}\right)=\mu\left(\overset{\frown}{Z_1Z_2}\right)-\mu\left(\overset{\frown}{Z_1N_2}\right)$$
$$=18°-\left(\frac{360°}{19}-\alpha_1\right)=\alpha_1-\frac{18°}{19}<\alpha_1.$$

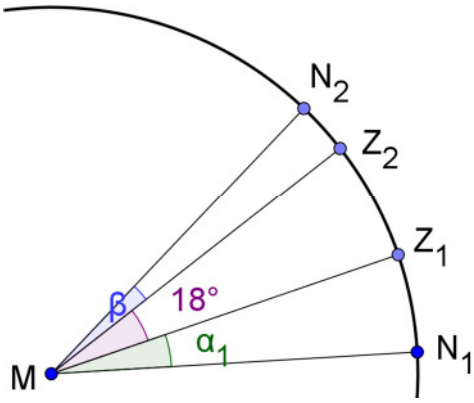
Der Mittelpunktswinkel von $\overset{\frown}{N_2Z_2}$ ist also kleiner, also der von $\overset{\frown}{N_1Z_1}$.

So kann man fortfahren und $\alpha_3=\alpha_2-\frac{18°}{19}$, $\alpha_4=\alpha_3-\frac{18°}{19}$, usw. definieren, bis $\alpha_n<\frac{18°}{19}$.

Dann liegt für α_n Fall 3 vor. Da $\alpha_1=\mu\left(\overset{\frown}{N_1Z_1}\right)<\mu\left(\overset{\frown}{Z_1Z_2}\right)=18°$ ist dies spätestens nach 18 Schritten der Fall, denn nach 19 Schritten gilt $18°-19\cdot\frac{18°}{19}=0°$.

Fall 2: $\alpha_1=\mu\left(\overset{\frown}{N_1Z_1}\right)=\frac{18°}{19}$. Dieser Fall kann nicht eintreten, da dann

$\alpha_2=\mu\left(\overset{\frown}{N_2Z_2}\right)=\mu\left(\overset{\frown}{Z_1Z_2}\right)-\mu\left(\overset{\frown}{Z_1N_2}\right)=18°-\left(\frac{360°}{19}-\alpha_1\right)=\frac{18°}{19}-\frac{18°}{19}=0°$. Es würden N_2 und Z_2 zusammenfallen. Das ist nach Aufgabenstellung nicht erlaubt.



Fall 3: $\alpha_1=\mu\left(\overset{\frown}{N_1Z_1}\right)<\frac{18°}{19}$.

Dann liegen die Punkte in einer anderen Anordnung auf dem Kreis. Sie ist in der Abbildung dargestellt.
Zwischen N_1 und N_2 liegen Z_1 und Z_2. Es ist

$$\mu\left(\overset{\frown}{N_1N_2}\right)=\frac{360°}{19}=\mu\left(\overset{\frown}{N_1Z_1}\right)+\mu\left(\overset{\frown}{Z_1Z_2}\right)+\mu\left(\overset{\frown}{Z_2N_2}\right)$$
$$=\alpha_1+18°+\beta.$$

Somit $\alpha_1+\beta=\frac{360°}{19}-18°=\frac{18°}{19}<1°$.

Folglich muss α_1 oder β kleiner als 0,5° sein.
Somit ist der Mittelpunktswinkel von $\overset{\frown}{N_1Z_1}$ ist oder von $\overset{\frown}{Z_2N_2}$ kleiner als 0,5°. Da in jedem Fall irgendwann Fall 3 vorliegt, ist die Behauptung bewiesen.

Aufgabe 6

An einer Tafel steht die Gleichung $a \cdot b + a \cdot b = \overline{ab}$.
Dabei sind a und b positive ganze Zahlen mit der gleichen Anzahl an Ziffern.
Mit $\overline{ab}$ wird die Zahl bezeichnet, die entsteht, wenn man die Zahlen a und b hintereinander schreibt; z.B. ist $\overline{ab} = 2019$, wenn $a = 20$ und $b = 19$ ist.
Bestimme alle Zahlen a und b, welche die Gleichung an der Tafel erfüllen.

Lösung:

Nur die Paare $a = 3$, $b = 6$ und $a = 13$, $b = 52$ erfüllen die Gleichung an der Tafel.

Vorbemerkung zu allen Beweisvorschlägen:
Sei n die Anzahl der Ziffern der positiven ganzen Zahlen a und b ($n \geq 1$).
Wenn $n = 1$ und z.B. $a = 5$, $b = 7$, so ist $\overline{ab} = 57 = 10 \cdot 5 + 7 = 10^1 \cdot a + b$.
Analog gilt allgemein $\overline{ab} = 10^n \cdot a + b$.
Somit ist die Gleichung $a \cdot b + a \cdot b = \overline{ab}$ an der Tafel äquivalent zu

$$2 \cdot a \cdot b = 10^n \cdot a + b \qquad (*)$$

1. Beweisvorschlag (mit Teilbarkeitsregeln):

In Gleichung (*) ist sowohl $2 \cdot a \cdot b$ als auch $10^n \cdot a$ durch a teilbar. Somit ist auch b durch a teilbar. Es gilt also $b = k \cdot a$. Da b und a die gleiche Stellenzahl n haben, muss $k < 10$ gelten.
Setzt man $b = k \cdot a$ in Gleichung (*) ein und dividiert dann durch a, so ergibt sich

$$2ka = 10^n + k \qquad (**)$$

Da in Gleichung (**) $2ka$ und 10^n gerade sind, muss auch k gerade sein.
Zusammen mit $k < 10$ bleiben also für k nur die vier Fälle $k = 2$, $k = 4$, $k = 6$, und $k = 8$.

Fall $k = 2$: Dann entsteht aus Gleichung (**): $4a = 10^n + 2$. Die Zahl auf der rechten Seite hat die Form $10^n + 2 = 1\underbrace{0 \ldots 0}_{n-1}2$. Für $n \geq 2$ lauten die beiden letzten Ziffern dieser Zahl also 02. Die Zahl ist also nach der Teilbarkeitsregel für 4 nicht durch 4 teilbar. Das widerspricht $4a = 10^n + 2$. Somit bleibt nur $n = 1$ übrig.
Aus $4a = 10^1 + 2 = 12$ folgt $a = 3$ und $b = ka = 2 \cdot 3 = 6$. Das ist das erste angegebene Lösungspaar.

Fall $k = 4$: Dann entsteht aus Gleichung (**): $8a = 10^n + 4$. Die Zahl auf der rechten Seite hat die Form $10^n + 4 = 1\underbrace{0 \ldots 0}_{n-1}4$. Für $n \geq 3$ lauten die drei letzten Ziffern dieser Zahl also 004. Die Zahl ist also nach der Teilbarkeitsregel für 8 nicht durch 8 teilbar. Das widerspricht $8a = 10^n + 4$. Somit bleibt nur $n = 1$ oder $n = 2$ übrig.
Wenn $n = 1$, so $8a = 10^1 + 4 = 14$. Somit ist keine natürliche Zahl als Lösung möglich.
Wenn $n = 2$, so $8a = 10^2 + 4 = 104$. Daraus folgt $a = 13$ und $b = 4a = 52$. Das ist das zweite angegebene Lösungspaar.

Fall k $= \mathbf{6}$***:*** Dann entsteht aus Gleichung (**): $12a = 10^n + 6$. Die Zahl auf der rechten Seite hat die Form $10^n + 6 = 1\underbrace{0 \dots 0}_{n-1}6$. Ihre Quersumme ist 7. Somit ist die Zahl nicht durch 3 teilbar. Dagegen ist $12a$ durch 3 teilbar. Es gibt in diesem Fall keine Lösung.

Fall k $= \mathbf{8}$***:*** Dann entsteht aus Gleichung (**): $16a = 10^n + 8$. Da 10 000 durch 16 teilbar ist, ist 10^n für alle $n \geq 4$ durch 16 teilbar, dagegen ist dann $10^n + 8$ nicht durch 16 teilbar. Das widerspricht $16a = 10^n + 8$. Somit bleibt nur $n = 1$, $n = 2$ oder $n = 3$ übrig.
Wenn $n = 1$, so ist $10^n + 8 = 18$ nicht durch 16 teilbar.
Wenn $n = 2$, so ist $10^2 + 8 = 108$ nicht durch 16 teilbar.
Wenn $n = 3$, so ist $10^3 + 8 = 1008$. Aber $a = 1008 : 16 = 63$ ist nicht dreistellig. Das widerspricht $n = 3$.
Es gibt also für $k = 8$ keine Lösung.

Überprüfung des Lösungspaars $a = 3$, $b = 6$: $2 \cdot 3 \cdot 6 = 36$.
Überprüfung des Lösungspaars $a = 13$, $b = 52$: $2 \cdot 13 \cdot 52 = 1352$.

Die beiden Lösungenspaare $a = 3$, $b = 6$ und $a = 13$, $b = 52$ sind alle mögliche Lösungspaare der Gleichung auf der Tafel.

Variante:
Aus Gleichung (**) folgt, dass k ein Teiler von $10^n = 2^n \cdot 5^n$ ist. Unter den einstelligen Teilern von Zahlen der Form kommt nur 1, 2, 4, 5 und 8 vor. Da k gerade sein muss, gibt es nur die Fälle $k = 2$, $k = 4$ und $k = 8$. Diese drei Fälle werden wie oben behandelt.

2. Beweisvorschlag (mit Teilbarkeit):

Löst man Gleichung (*) aus der Vorbemerkung nach b auf, so ergibt sich

$$2 \cdot a \cdot b = 10^n \cdot a + b \Leftrightarrow b \cdot (2a - 1) = 10^n \cdot a \Leftrightarrow b = \frac{10^n \cdot a}{2a - 1}$$

Wäre $a = 1$, so auch $n = 1$. Setzt man dies in $b = \frac{10^n \cdot a}{2a-1}$ ein, so folgt $b = 10$. Da a und b nicht dieselbe Stellenzahl haben, ist $a = 1$ nicht möglich. Es muss $a > 1$ gelten.

Da $b = \frac{10^n \cdot a}{2a-1}$ eine positive ganze Zahl ist, ist der Nenner des Bruchterms ein Teiler des Zählers. Die Zahlen a und $2a - 1$ haben jedoch keinen gemeinsamen Teiler außer 1. Ist die Zahl t nämlich ein Teiler von a und von $2a - 1$, so ist t auch ein Teiler von $2a - (2a - 1) = 1$, also $t = 1$.
Da $2a - 1$ ein Teiler von $10^n \cdot a$ ist, muss $2a - 1$ also ein Teiler von 10^n sein.
Nun ist $10^n = 2^n \cdot 5^n$. Da $2a - 1$ ungerade ist und demnach nur ungerade Teiler hat, während 2^n nur gerade Teiler hat, muss $2a - 1$ ein Teiler von 5^n sein.

Insbesondere gilt $2a - 1 \leq 5^n$. Da a aber n-stellig ist, ist insbesondere auch $2a - 1$ mindestens n-stellig, also müsste auch 5^n mindestens n Stellen haben.
Somit muss $5^n \geq 10^{n-1} = 2^{n-1} \cdot 5^{n-1}$ gelten. Dividiert man diese Ungleichung auf beiden Seiten durch 5^{n-1} so ergibt sich $5 \geq 2^{n-1}$. Dies ist nur für $n = 1$, $n = 2$ oder $n = 3$ erfüllt.

Fall $n = 1$: $2a - 1$ ist ein Teiler von 5.
Aus $2a - 1 = 1$ würde $a = 1$ folgen. Das wurde zu Beginn des Beweises ausgeschlossen.
Also $2a - 1 = 5$. Somit $a = 3$ und $b = \frac{10^n \cdot a}{2a-1} = \frac{30}{5} = 6$.
Das ergibt die erste mögliche Lösung.

Fall $n = 2$: $2a - 1$ ist ein Teiler von $5^2 = 25$.
Die Zahl 25 hat die Teiler 1, 5 und 25. $2a - 1 = 1$ bzw. $2a - 1 = 5$ ist nicht möglich, da dann a nicht zweistellig wäre. Es bleibt nur $2a - 1 = 25$. Somit $a = 13$ und $b = \frac{10^2 \cdot 13}{25} = 52$.
Das ergibt die zweite mögliche Lösung.

Fall $n = 3$: $2a - 1$ ist ein Teiler von $5^3 = 125$.
Die Zahl 125 hat die Teiler 1, 5, 25 und 125. $2a - 1 = 1$, $2a - 1 = 5$, $2a - 1 = 25$ und $2a - 1 = 125$ sind alle nicht möglich, da dann a nicht dreistellig ist.
Es gibt in diesem Fall also keine weitere Lösung.

Somit sind die beiden Lösungenspaare $a = 3$, $b = 6$ und $a = 13$, $b = 52$ alle mögliche Lösungspaare der Gleichung auf der Tafel.

3. Beweisvorschlag (mit Termumformungen):

Löst man Gleichung (*) aus der Vorbemerkung nach b auf, so ergibt sich $b = \frac{10^n \cdot a}{2a-1}$.
Dieser Bruch wird umgeformt:

$$b = \frac{10^a \cdot a}{2a-1} = \frac{2^{n-1} \cdot 5^n \cdot 2 \cdot a - 2^{n-1} \cdot 5^n + 2^{n-1} \cdot 5^n}{2a-1} = \frac{2^{n-1} \cdot 5^n \cdot (2a-1) + 2^{n-1} \cdot 5^n}{2a-1}$$

$$= 2^{n-1} \cdot 5^n + \frac{2^{n-1} \cdot 5^n}{2a-1}$$

Da b nach Voraussetzung eine ganze Zahl sein soll, muss $2a-1$ ein Teiler von $2^{n-1} \cdot 5^n$ sein. Da $2a-1$ ungerade ist und demnach nur ungerade Teiler hat, während 2^{n-1} nur gerade Teiler hat, muss $2a-1$ ein Teiler von 5^n sein.

Insbesondere gilt $2a-1 \leq 5^n$. Dies ist äquivalent zu $a \leq \frac{5^n+1}{2}$.
Da a n-stellig ist, gilt außerdem $a \geq 10^{n-1}$, insgesamt gilt also $10^{n-1} \leq a \leq \frac{5^n+1}{2}$.
Es muss also $10^{n-1} \leq \frac{5^n+1}{2}$ gelten. Diese Ungleichung ist äquivalent zu

$$1 \geq 2 \cdot 10^{n-1} - 5^n = 2^n \cdot 5^{n-1} - 5^n = 5^{n-1} \cdot (2^n - 5)$$

Dies ist nur möglich für $n = 1$ oder $n = 2$, da für $n \geq 3$ beide Faktoren der rechten Seite der Ungleichung größer als 1 sind.

Genau wie im zweiten Beweisvorschlag wird nun bewiesen, dass es für die beiden Fälle $n = 1$ und $n = 2$ genau die beiden Lösungspaare $a = 3$, $b = 6$ und $a = 13$, $b = 52$ gibt.
Das war zu zeigen.