Landeswettbewerb Mathematik
Baden-Württemberg
Musterlösungen 1. Runde 2015/2016

Aufgabe 1

Paul will sich eine zehnstellige Geheimzahl für sein Handy ausdenken. Als erste Ziffer von links wählt er die 3. Die weiteren Ziffern will er so festlegen, dass je zwei aufeinander folgende Ziffern der Geheimzahl eine zweistellige Zahl bilden, die entweder durch 17 oder durch 23 teilbar ist.

Bestimme alle Möglichkeiten für Pauls Geheimzahl.

Lösung:

Paul hat zwei Möglichkeiten für seine Geheimzahl: **34692 34685** oder **34692 34692**.

Beweisvorschlag:

Die Tabelle zeigt alle Vielfachen von 17 und 23, die nur zwei Stellen haben.

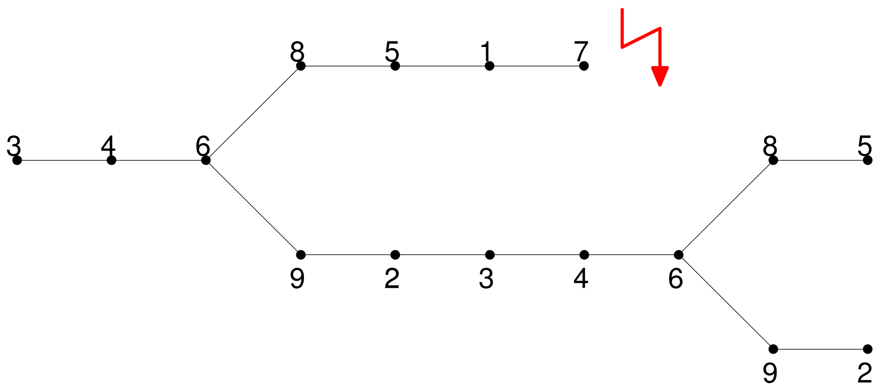
mal	1	2	3	4	5
17	17	34	51	68	85
23	23	46	69	92	

Da die zehnstellige Zahl mit 3 beginnen soll, kommt als zweite Ziffer nur die 4 in Frage, denn 34 ist die einzige Zahl, die mit 3 beginnt und in der Tabelle vorkommt. Entsprechend ist 46 die einzige Zahl in der Tabelle, die mit 4 beginnt. Die dritte Ziffer der Geheimzahl muss also 6 sein. Mit Zehnerziffer 6 gibt es nun zwei Zahlen in der Tabelle: Einerseits 68, andererseits 69.
Somit gibt es für die vierte Ziffer zwei Fälle:

Fall 1: Die vierte Ziffer ist 8. Da die 85 die einzige Zahl in der Tabelle ist, die mit 8 beginnt, muss an der fünften Stelle der Geheimzahl die 5 stehen. Dann bleiben für die sechste Ziffer nur die 1 und für die siebte nur die 7. Dies führt zu einem Widerspruch, da in obiger Tabelle keine Zahl mit 7 beginnt. Die Geheimzahl kann in diesem Fall nicht bis zur zehnten Stelle fortgesetzt werden.

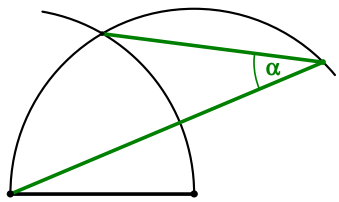
Fall 2: Die vierte Ziffer ist 9. Dann kann an der fünften Stelle nur die 2 stehen und an der sechsten Stelle entsprechend die Ziffer 3. Für die 7. und 8. Stelle ist nun wieder - wie bei der zweiten und dritten Stelle - nur die 4 und die 6 möglich. Wegen der Vielfachen 68 oder 69 gibt es für die vorletzte (d.h. neunte) Stelle wieder zwei gültige Belegungen, nämlich 8 oder 9.
Falls 8 die neunte Ziffer ist, so muss 5 an der zehnten Stelle stehen, falls 9 an der neunten Stelle steht, so muss die Geheimzahl mit 2 enden.
Die eine Zahl heißt **34692 34685**, die andere **34692 34692**.

Das folgende Baumdiagramm veranschaulicht den Lösungsweg:



Aufgabe 2

Bestimme die Weite des Winkels α.

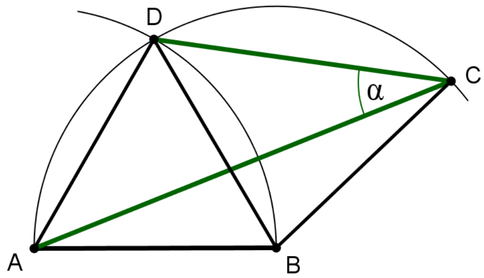


Lösung:

Es gilt $\alpha = 30°$.

1. Beweisvorschlag (mit gleichschenkligen Dreiecken):

Da die Punkte A, C und D auf einem Kreis mit Mittelpunkt B liegen, sind die Strecken AB, CB und DB gleich lang.
Da die Punkte D und B auf einem Kreis mit Mittelpunkt A liegen, sind die Strecken AB und AD gleich lang.



Daraus folgt:

(1) Das Dreieck ABD ist gleichseitig.
(2) Das Dreieck ABC ist gleichschenklig mit Basis AC.
(3) Das Dreieck BCD ist gleichschenklig mit Basis DC.

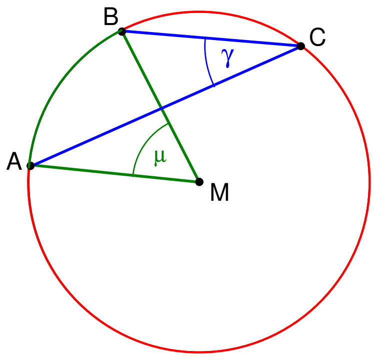
Aus (1) folgt $\sphericalangle DBA = 60°$, denn im gleichseitigen Dreieck ist die Weite der Innenwinkel 60°.
Aus (2) folgt mit dem Basiswinkelsatz für gleichschenklige Dreiecke und dem Winkelsummensatz: $\sphericalangle ACB = \dfrac{180° - \sphericalangle CBA}{2}$.
Aus (3) folgt mit dem Basiswinkelsatz für gleichschenklige Dreiecke und dem Winkelsummensatz für Dreiecke: $\sphericalangle DCB = \dfrac{180° - \sphericalangle CBD}{2}$.

Für den gesuchten Winkel α folgt nun

$$\alpha = \sphericalangle DCB - \sphericalangle ACB = \frac{180° - \sphericalangle CBD}{2} - \frac{180° - \sphericalangle CBA}{2}$$
$$= \frac{180° - \sphericalangle CBD - 180° + \sphericalangle CBA}{2} = \frac{\sphericalangle CBA - \sphericalangle CBD}{2} = \frac{\sphericalangle DBA}{2} = \frac{60°}{2} = 30°.$$

2. Beweisvorschlag (mit Satz vom Mittelpunktswinkel):

Gegeben sind zwei Punkte A und B auf einem Kreis. Der **Kreisbogen** $\overset{\frown}{AB}$ ist in der Zeichnung rot markiert, der zugehörige **Restbogen** $\overset{\frown}{BA}$ ist grün markiert. Liegt ein weiterer Punkt C auf dem Kreisbogen $\overset{\frown}{AB}$, so heißt der Winkel $\gamma = \sphericalangle BCA$ **Umfangswinkel** auf dem Kreisbogen $\overset{\frown}{AB}$. Der Winkel $\mu = \sphericalangle BMA$ heißt **Mittelpunktswinkel** zum Bogen $\overset{\frown}{BA}$.



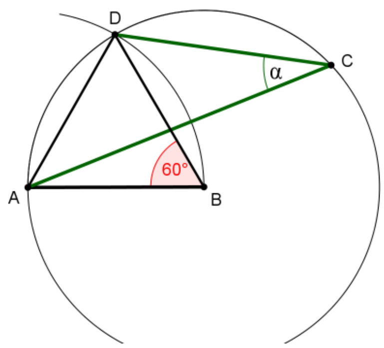
Zum Beweis verwendet man folgenden bekannten Satz.

Satz über den Mittelpunktswinkel: *Der Umfangswinkel auf einem Kreisbogen ist halb so weit wie der zum Restbogen gehörende Mittelpunktswinkel.*

In der Zeichnung bedeutet dieser Satz: Der Winkel $\gamma = \sphericalangle BCA$ ist halb so weit wie der Mittelpunktswinkel $\mu = \sphericalangle BMA$.

Wie im 1. Beweisvorschlag erkennt man
$\sphericalangle DBA = 60°$.
Der Winkel $\alpha = \sphericalangle DCA$ ist ein Umfangswinkel auf dem Kreisbogen $\overset{\frown}{AD}$, $\sphericalangle DBA$ ist der zum Restbogen $\overset{\frown}{DA}$ gehörende Mittelpunktswinkel.
Daraus folgt mit dem Satz vom Mittelpunktswinkel

$$\alpha = \sphericalangle DCA = \frac{\sphericalangle DBA}{2} = \frac{60°}{2} = 30°.$$

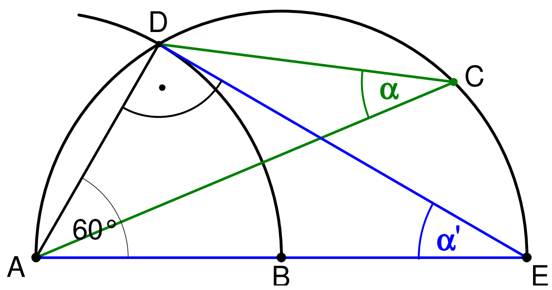


3. Beweisvorschlag (mit Umfangswinkelsatz):

Die Bezeichnungen sind gleich wie im 2. Beweisvorschlag. Statt dem Satz über den Mittelpunktswinkel verwendet man aber folgenden Satz:

Umfangswinkelsatz: *Der Umfangswinkel ist für jeden Punkt C auf dem Kreisbogen* $\overset{\frown}{AB}$ *(unabhängig von der Lage von C) gleich groß.*

Ergänzt man AB zum Durchmesser AE (s. Abb. rechts), so ist nach dem Umfangswinkelsatz $\alpha' = \alpha$, denn beide Winkel sind Umfangswinkel auf dem Kreisbogen $\overset{\frown}{AD}$.
Wie im 1. Beweisvorschlag beweist man $\sphericalangle EAD = 60°$. Nach dem Satz des Thales ist $\sphericalangle ADE = 90°$.



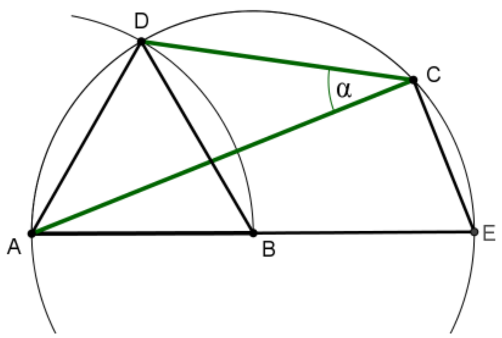
Aus dem Winkelsummensatz für das Dreieck AED folgt $\alpha' = 180° - 90° - 60° = 30°$.
Somit $\alpha = \alpha' = 30°$.

4. Beweisvorschlag (mit Satz vom Sehnenviereck):

Ein Viereck ABCD heißt **Sehnenviereck**, wenn die vier Punkte A,B,C,D auf einem Kreis liegen.

Zum Beweis verwendet man folgenden Satz über Sehnenvierecke.

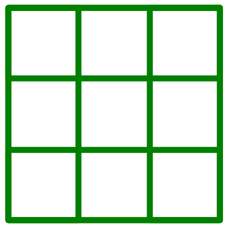
Satz vom Sehnenviereck: *In einem Sehnenviereck ergänzen sich gegenüberliegende Winkel zu* 180°.



Ergänzt man den Radius AB zum Durchmesser AE, so erhält man das Sehnenviereck AECD.
Wie im 1. Beweisvorschlag erkennt man $\sphericalangle BAD = 60°$.
Im Sehnenviereck AECD sind $\sphericalangle BAD$ und $\sphericalangle DCE$ gegenüberliegende Winkel. Daraus folgt:
$\sphericalangle DCE = 180° - \sphericalangle BAD = 180° - 60° = 120°$.
Da C auf dem Thaleskreis über dem Durchmesser AE liegt, gilt $\sphericalangle ACE = 90°$. Somit:
$\alpha = \sphericalangle DCE - \sphericalangle ACE = 120° - 90° = 30°$.

Aufgabe 3

Julia schreibt in jedes Feld des nebenstehenden Quadrates eine der Zahlen von 1 bis 9. Dabei verwendet sie jede Zahl nur einmal.



Nun multipliziert Julia jeweils die drei Zahlen, die in einer Zeile bzw. einer Spalte stehen, und zählt, wie viele der sechs Produkte Quadratzahlen sind.

Finde alle Möglichkeiten für die Anzahl dieser Quadratzahlen.

Lösung:

Es können 0, 1, 2 oder 3 Quadratzahlen vorkommen, aber nicht mehr.

Beweisvorschlag:

Vorüberlegung:
Die Primfaktorzerlegung einer Quadratzahl enthält jeden Primfaktor, der überhaupt vorkommt, in einer geraden Anzahl. Denn jeder Primfaktor einer natürlichen Zahl n kommt in der Primfaktorzerlegung von $n^2 = n \cdot n$ in jedem der beiden Faktoren n vor.

Nun zum eigentlichen Beweis:
Wenn die Zahl 5 in einer Zeile des Quadrats vorkommt, so ist das Produkt der drei Zahlen dieser Zeile sicher keine Quadratzahl. Denn die Zahl 5 kommt in keiner anderen Primfaktordarstellung der Zahlen 1,2,…,9 vor, außer in 5 selbst. Somit enthält die Primfaktordarstellung des Produkts der Zeile nur genau eine 5 und kann daher nach der Vorüberlegung keine Quadratzahl sein. Analog kann das Produkt einer Zeile oder Spalte, die die 5 oder 7 enthält keine Quadratzahl sein.

Die 5 kommt in einer Zeile und in einer Spalte vor. Egal wo die 7 steht, sie kommt in mindestens einer weiteren Zeile oder in einer weiteren Spalte vor. Daher gibt es unter den sechs Produkten mindestens drei, die keine Quadratzahl sein können. Also können höchstens drei der sechs Produkte eine Quadratzahl sein.

Die folgenden Beispiele zeigen, dass 0, 1, 2 oder 3 Quadratzahlen tatsächlich vorkommen können:

Keine Quadratzahl:

1	3	7	21
5	2	4	40
9	8	6	432
45	48	168	

Eine Quadratzahl:

1	3	7	21
5	2	4	40
9	6	8	432
45	**36**	224	

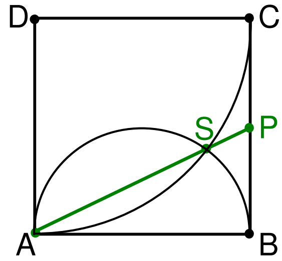
Zwei Quadratzahlen:

4	1	7	28
5	2	9	90
3	8	6	**144**
60	**16**	378	

Drei Quadratzahlen:

4	1	9	**36**
5	2	7	70
3	8	6	**144**
60	**16**	378	

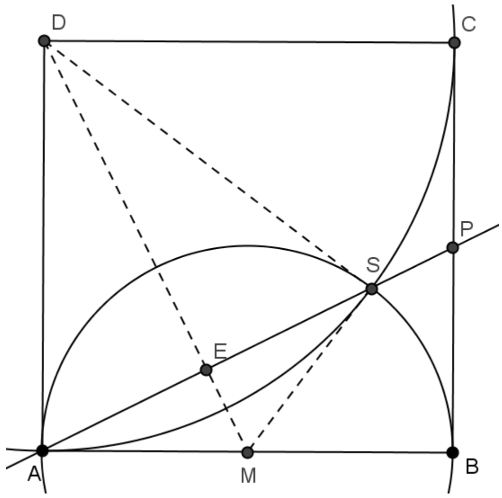
Aufgabe 4



Im Quadrat ABCD schneidet der Kreis um D mit Radius DA den Kreis mit Durchmesser AB im Punkt S. Die Gerade durch A und S schneidet die Seite BC im Punkt P.

Zeige: P ist der Mittelpunkt der Seite BC.

1. Beweisvorschlag (Kongruenzsätze):



Sei M der Mittelpunkt der Seite AB. M ist der Mittelpunkt des Kreises mit Durchmesser AB.
Die Dreiecke AMD und SDM sind kongruent nach Kongruenzsatz SSS. Es ist nämlich $\overline{DA} = \overline{DS}$ (A und S liegen auf einem Kreis mit Mittelpunkt D), $\overline{MA} = \overline{MS}$ (A und S liegen auf einem Kreis mit Mittelpunkt M) und MD ist eine gemeinsame Seite der beiden Dreiecke.

Daraus folgt: Das Viereck AMSD ist ein Drachenviereck. Die Diagonale DM ist eine Symmetrieachse dieses Vierecks. Durch eine Achsenspiegelung an DM wird A auf S abgebildet, es ist also AS orthogonal zu DM,
Somit ist $\sphericalangle DEA = 90°$.

Aus dem Winkelsummensatz für das Dreieck AMD folgt
$\sphericalangle ADM = 90° - \sphericalangle EMA$ (1)

Aus dem Winkelsummensatz für das Dreieck AME folgt
$\sphericalangle MAE = \sphericalangle DEA - \sphericalangle EMA = 90° - \sphericalangle EMA$ (2)

Aus (1) und (2) folgt: $\sphericalangle ADM = \sphericalangle MAE$.
Die Dreiecke AMD und ABP sind somit kongruent nach dem Kongruenzsatz WSW, da
$\sphericalangle ADM = \sphericalangle MAE$, $\overline{AD} = \overline{AB}$ und $\sphericalangle MAD = \sphericalangle PBA = 90°$.
Damit gilt: $\overline{BP} = \overline{AM} = \frac{1}{2}\overline{AB} = \frac{1}{2}\overline{BC}$. P ist also der Mittelpunkt von BC.

2. Beweisvorschlag (mit Drehung):

Die Grundidee dieses Lösungsvorschlages besteht darin, das Quadrat ABCD um den Mittelpunkt des Quadrats um 90° gegen den Uhrzeigersinn zu drehen. Dabei fällt der Punkt A auf den Punkt B, B auf C, C auf D und D auf A. Der Mittelpunkt M der Seite AB fällt bei dieser Drehung auf den Mittelpunkt M_{BC} der Seite BC. Außerdem ist das Bild g' einer Geraden g bei einer 90°-Drehung stets senkrecht zu g.
Es wird nun gezeigt, dass M_{BC} mit dem Punkt P zusammenfällt.

Zum Beweis wird folgende Behauptung benötigt:

Behauptung: Die Geraden DM und AS stehen senkrecht aufeinander.

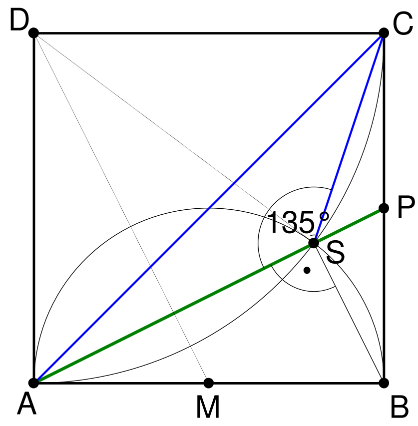
Beweismöglichkeit I für diese Behauptung:
Nach Aufgabenstellung sind die Dreiecke ASD und AMS beide gleichschenklig mit Basis AS. Also geht die Mittelsenkrechte der Strecke AS sowohl durch M als auch durch D. Diese Mittelsenkrechte ist also die Gerade DM.

Beweismöglichkeit II für diese Behauptung:
Nach Aufgabenstellung ist das Viereck AMSD ein Drachenviereck, denn die benachbarten Seiten AM und MS sowie SD und DA sind gleich lang, da A und S auf Kreisen um M bzw. D liegen. In einem Drachenviereck sind aber die Diagonalen DM und AS orthogonal zueinander.

Beweismöglichkeit III für diese Behauptung:
Die beiden Kreise um D bzw. M sind achsensymmetrisch zur Verbindungsgeraden DM der beiden Mittelpunkte. Die Schnittpunkte A und S der beiden Kreise werden bei der Achsenspiegelung an DM aufeinander abgebildet, somit ist AS senkrecht zur Spiegelachse DM.

Zurück zum Beweis der Aufgabe:
Da DM und AS nach Behauptung aufeinander senkrecht stehen, geht die Gerade DM durch D bei der 90°-Drehung um den Mittelpunkt des Quadrats in diejenige Gerade durch A über, die zur Geraden DM senkrecht ist. Dies ist aber die Gerade AS aus der Aufgabenstellung. Der Bildpunkt M_{BC} von M liegt auf dieser Bildgeraden AS und auf der Seite BC. Der Schnittpunkt der Geraden AS mit der Seite BC ist aber nach Aufgabenstellung der Punkt P. Also stimmen M_{BC} und P überein.

3. Beweisvorschlag (mit Kathetensatz und Ähnlichkeit):



Nach dem Thalessatz ist $\sphericalangle ASB = 90°$, also ist BS die Höhe im rechtwinkligen Dreieck ABP.

Nach dem Kathetensatz gilt $\overline{BP}^2 = \overline{AP} \cdot \overline{SP}$. (*)

Behauptung: *Die beiden Dreiecke APC und SPC sind ähnlich.*

Beweis der Behauptung: Wir zeigen zunächst $\sphericalangle CSA = 135°$:

$$\sphericalangle CSA = \sphericalangle CSD + \sphericalangle DSA$$

$$= \frac{1}{2} \cdot (180° - \sphericalangle SDC) + \frac{1}{2} \cdot (180° - \sphericalangle ADS)$$

$$= 180° - \frac{1}{2} \cdot (\sphericalangle SDC + \sphericalangle ADS) = 180° - \frac{1}{2} \cdot 90° = 135°$$

Somit ist $\sphericalangle PSC = 180° - 135° = 45° = \sphericalangle ACP$. Die Dreiecke APC und SPC stimmen also im Winkel bei P und einem Winkel der Weite 45° überein, sie sind also ähnlich. Somit ist die Behauptung bewiesen.

Aus der Behauptung folgt $\frac{\overline{CP}}{\overline{SP}} = \frac{\overline{AP}}{\overline{CP}}$ bzw. $\overline{CP}^2 = \overline{AP} \cdot \overline{SP}$. Aus (*) folgt $\overline{BP} = \overline{CP}$ und P ist daher der Mittelpunkt von BC.

4. Beweisvorschlag (mit Koordinatensystem):

Wir legen ein kartesisches Koordinatensystem so auf die Figur, dass die Punkte A, B, C, D die Koordinaten $A(0|0)$, $B(2|0)$, $C(2|2)$ und $D(0|2)$ haben.

Die Gerade DM durch D und M(1|0) hat die Steigung -2.

Das Viereck AMSD ist ein Drachenviereck, also sind die Diagonalen DM und AS des Vierecks senkrecht zueinander (vgl. auch die Behauptung in Beweisvorschlag 1).

Die Ursprungsgerade AS steht somit senkrecht auf der Geraden DM mit Steigung $m_{DM} = -2$.

Die Steigung m_{AS} von AS ist demnach $m_{AS} = -\frac{1}{m_{DM}} = -\frac{1}{-2} = \frac{1}{2}$.

Die Gerade AS hat also die Gleichung $y = \frac{1}{2}x$. Die Seitenmitte $M_{BC}(2|1)$ liegt auf dieser Geraden, also ist M_{BC} der Schnittpunkt P von AS mit BC.

Alternative zum Beweisvorschlag mit Koordinatensystem:

Der Punkt $S(a|b)$ liegt auf einem Kreis vom Radius 1 um $M(1|0)$. Die Länge der Strecke SM ist also 1. Nach dem Satz des Pythagoras gilt also $(1-a)^2 + b^2 = 1^2 = 1$ bzw. $a^2 + b^2 = 2a$.

Außerdem liegt $S(a|b)$ auf einem Kreis vom Radius 2 um $D(0|2)$, es gilt also

$a^2 + (2-b)^2 = 2^2 = 4$ bzw. $a^2 + b^2 = 4b$. Aus $a^2 + b^2 = 2a = 4b$ folgt $a = 2b$. (Einsetzen in $a^2 + b^2 = 4b$ ergibt $5b^2 - 4b = 0$ und somit $b = 0{,}8$ und $S(1{,}6|0{,}8)$ - dies wird aber nicht benötigt).

Aus $b = \frac{1}{2}a$ folgt, dass die Ursprungsgerade durch A und S die Gleichung $y = \frac{1}{2}x$ hat.

Der Schnittpunkt P dieser Geraden mit BC hat die x-Koordinate 2, es gilt also $P = P(2|1)$.

Das ist der Mittelpunkt der Seite BC.

Aufgabe 5

Tamara, Kilian und Konstantin haben je eine Schale mit Murmeln. Tamara entnimmt ihrer Schale die Hälfte der Murmeln und legt sie zu gleichen Teilen in die Schalen der beiden anderen. Danach verfährt zunächst Kilian mit den Murmeln in seiner Schale genauso und schließlich auch Konstantin. Erstaunt stellen die drei fest, dass alle nun wieder genau so viele Murmeln besitzen wie zu Beginn.

Bestimme alle Anzahlen von Murmeln, die die drei zusammen besitzen können.

Lösung:

Die in der Aufgabe beschriebene Umverteilung der Murmeln ist genau dann möglich, wenn die Anzahl von Murmeln ein Vielfaches von 9 ist.

1. Beweisvorschlag:

Es bezeichne a die Anzahl von Murmeln, die Tamara am Anfang zur Verfügung hat. Analog bezeichnet b bzw. c die Anzahl der Murmeln von Kilian bzw. Konstantin zu Beginn.
Tamara gibt zu Beginn ein Viertel ihrer Murmeln an Kilian, ein weiteres Viertel an Konstantin. Die Anzahl a ihrer Murmeln muss also durch 4 teilbar sein, es gilt $a = 4k$ für eine natürliche Zahl k. Somit gibt Tamara bei der ersten Umverteilung je k Murmeln an Kilian und Konstantin, sie behält noch 2k Murmeln.
Nun hat Kilian $b+k$ Murmeln, von denen er ein Viertel an Tamara und ein weiteres Viertel an Konstantin abgibt. Also muss $b+k$ durch 4 teilbar sein, es gilt $b+k=4m$ für eine natürliche Zahl m. Kilian gibt je m Murmeln hat Tamara und Konstantin.
Konstantin hat jetzt $c+k+m$. Murmeln. Von diesen gibt er wiederum je ein Viertel an Tamara und Kilian, es ist also $c+k+m$ durch 4 teilbar. Somit $c+k+m=4n$ für eine natürliche Zahl n.
Die Tabelle verdeutlicht die Umverteilungen:

	Tamara	Kilian	Konstantin
Beginn	$a=4k$	$b=4m-k$	$c=4n-k-m$
1. Umverteilung	$2k$	$4m$	$4n-m$
2. Umverteilung	$2k+m$	$2m$	$4n$
Ende	$2k+m+n$	$2m+n$	$2n$
Gleichung Beginn = Ende	$4k=2k+m+n$	$4m-k=2m+n$	$4n-k-m=2n$

Da am Ende wieder jeder genauso viele Murmeln wie zu Beginn besitzt, ergeben sich die Gleichungen in der letzten Zeile der Tabelle. Die erste Gleichung ist äquivalent zu $m=2k-n$, die zweite Gleichung ist äquivalent zu $2m=n+k$. Setzt man $m=2k-n$ in $2m=n+k$ ein, so folgt $2\cdot(2k-n)=n+k$, bzw. $4k-2n=n+k$. Dies ist äquivalent zu $3n=3k$ bzw. $k=n$. Aus $m=2k-n$ folgt $m=k=n$.
Somit hat Tamara zu Beginn $a=4k$ Murmeln, Kilian hat $b=4m-k=3k$ und Konstantin hat $c=4n-k-m=2k$ Murmeln. Zusammen sind dies $4k+3k+2k=9k$ Murmeln.
Die Anzahl der Murmeln muss also ein Vielfaches von 9 sein.

Zu prüfen ist noch, ob die Vorgehensweise mit allen durch 9 teilbaren Gesamtzahlen möglich ist. Sei also die Gesamtzahl $9k$.

Die 9k Murmeln werden so verteilt, dass Tamara zu Beginn 4k, Kilian 3k und Konstantin 2k Murmeln hat.
Die Tabelle zeigt die Umverteilungen der Murmeln:

	Tamara	Kilian	Konstantin
Beginn	$4k$	$3k$	$2k$
1. Umverteilung	$4k:2=2k$	$3k+k=4k$	$2k+k=3k$
2. Umverteilung	$2k+k=3k$	$2k$	$3k+k=4k$
Ende	$3k+k=4k$	$2k+k=3k$	$2k$

Jeder hat also am Ende wieder so viele Murmeln wie zu Beginn und die Vorgehensweise ist für die Gesamtzahl 9k immer möglich.

2. Beweisvorschlag:

In der ersten Runde erhalten Kilian und Konstantin gleich viele Murmeln von Tamara, sei k diese Anzahl von Murmeln, die Kilian und Konstantin von Tamara erhalten.
In der zweiten Runde erhalten Tamara und Konstantin gleich viele Murmeln von Kilian. Sei m diese Anzahl von Murmeln.
Nach zwei Runden hat Tamara also 2k Murmeln abgegeben und m bekommen. Insgesamt fehlen ihr 2k – m Murmeln zu ihrer Anfangszahl. Kilian hat 2m Murmeln abgegeben und k bekommen, ihm fehlen also im Vergleich zum Anfang 2m - k Murmeln.
Damit beide nach der dritten Runde wieder so viele Murmeln wie zu Beginn haben, muss demnach Tamara 2k – m Murmeln von Konstantin bekommen, Kilian muss 2m – k Murmeln bekommen. Tamara und Kilian erhalten aber gleich viele Murmeln von Konstantin.
Somit muss $2k - m = 2m - k$ gelten.
Dies ist äquivalent zu $3k = 3m$, bzw. $k = m$.

Da Tamara in der ersten Runde ein Viertel ihrer Murmeln an die beiden anderen abgibt, hat sie zu Beginn also 4k Murmeln. Nach der ersten Runde hat Kilian $4m = 4k$ Murmeln. Da er k Murmeln in der ersten Runde von Tamara erhielt, hatte er zu Beginn 3k Murmeln.
Konstantin gibt in der dritten Runde ebenfalls je $2k - m = 2k - k = k$ Murmeln an Tamara und Kilian ab, er hat also nach der zweiten Runde ebenfalls 4k Murmeln gehabt. Da er in den ersten beiden Runden jeweils k Murmeln erhielt, hat er zu Beginn 2k Murmeln gehabt.
Zusammen haben sie $4k + 3k + 2k = 9k$ Murmeln gehabt. Da k eine beliebige natürliche Zahl ist, ist die Umverteilung für jede Gesamtzahl 9k möglich.

Variante zum 2. Beweisvorschlag:

Wie im Beweis des 2. Beweisvorschlags gibt Tamara je k Murmeln an Kilian und Konstantin ab, Kilian gibt je m Murmeln in der zweiten Runde an Tamara und Konstantin ab.
Angenommen es wäre $m > k$, Kilian, würde mehr abgeben als Tamara. Dann fehlen Tamara nach der zweiten Runde weniger als k Murmeln, da sie 2k abgibt, aber m erhält. Entsprechend fehlen Kilian nach der zweiten Runde mehr als k Murmeln, da er 2m abgibt aber nur k erhält. Da Tamara weniger Murmeln als Kilian fehlen, kann Konstantin dies nicht ausgleichen, denn er verteilt seine Murmeln „zu gleichen Teilen". Somit ist $m > k$ nicht möglich.
Analog ergibt sich ein Widerspruch, wenn $m < k$. Somit muss $k = m$ gelten und wie im ersten Beweisvorschlag hat Tamara zu Beginn 4k, Kilian 3k und Konstantin 2k Murmeln. Zusammen haben sie 9k Murmeln und die Umverteilung ist in diesem Fall immer möglich.

3. Beweisvorschlag:

Es bezeichne a die Anzahl von Murmeln, die Tamara am Anfang zur Verfügung hat. Analog bezeichnet b bzw. c die Anzahl der Murmeln von Kilian bzw. Konstantin zu Beginn. Es sei $s = a + b + c$ die Gesamtzahl der Murmeln.

Nacheinander legt ein Kind die Hälfte seiner Murmeln zu gleichen Teilen in die Schale der anderen. Es behält also die Hälfte seines Vorrats und legt je ein Viertel seines Vorrats in die Schale der beiden anderen.

Zuerst gibt Tamara Murmeln ab. Danach ergeben sich folgende Murmelzahlen:

Tamara: $\frac{1}{2}a$

Kilian: $b + \frac{1}{4}a$

Konstantin: $c + \frac{1}{4}a$

Dann gibt Kilian Murmeln ab. Danach ergeben sich folgende Murmelzahlen:

Tamara: $\frac{1}{2}a + \frac{1}{4} \cdot \left(b + \frac{1}{4}a\right) = \frac{9}{16}a + \frac{1}{4}b$

Kilian: $\frac{1}{2} \cdot \left(b + \frac{1}{4}a\right) = \frac{1}{8}a + \frac{1}{2}b$

Konstantin: $c + \frac{1}{4}a + \frac{1}{4} \cdot \left(b + \frac{1}{4}a\right) = \frac{5}{16}a + \frac{1}{4}b + c$

Zuletzt gibt Konstantin Murmeln ab. Danach ergeben sich folgende Murmelzahlen:

Tamara: $\frac{9}{16}a + \frac{1}{4}b + \frac{1}{4} \cdot \left(\frac{5}{16}a + \frac{1}{4}b + c\right) = \frac{41}{64}a + \frac{5}{16}b + \frac{1}{4}c$

Kilian: $\frac{1}{8}a + \frac{1}{2}b + \frac{1}{4} \cdot \left(\frac{5}{16}a + \frac{1}{4}b + c\right) = \frac{13}{64}a + \frac{9}{16}b + \frac{1}{4}c$

Konstantin: $\frac{1}{2} \cdot \left(\frac{5}{16}a + \frac{1}{4}b + c\right) = \frac{5}{32}a + \frac{1}{8}b + \frac{1}{2}c$

Da am Ende wieder jeder genauso viele Murmeln wie zu Beginn besitzt, ergibt sich ein lineares Gleichungssystem, das wie üblich umgeformt wird:

$$\begin{array}{rcrcrcll}
\frac{41}{64}a & + & \frac{5}{16}b & + & \frac{1}{4}c & = & a & \quad |-a|\cdot 64 \\
\frac{13}{64}a & + & \frac{9}{16}b & + & \frac{1}{4}c & = & b & \quad |-b|\cdot 64 \\
\frac{5}{32}a & + & \frac{1}{8}b & + & \frac{1}{2}c & = & c & \quad |-c|\cdot 32 \\
\hline
-23a & + & 20b & + & 16c & = & 0 & \quad (I) \\
13a & - & 28b & + & 16c & = & 0 & \quad (II) \\
5a & + & 4b & - & 16c & = & 0 & \quad (III) \\
\hline
-23a & + & 20b & + & 16c & = & 0 & \quad (I) \\
3a & - & 4b & & & = & 0 & \quad (IIa) = \frac{1}{12}\cdot\left((II)-(I)\right) \\
-3a & + & 4b & & & = & 0 & \quad (IIIa) = \frac{1}{6}\cdot\left((III)+(I)\right) \\
\hline
-23a & + & 20b & + & 16c & = & 0 & \quad (I) \\
3a & - & 4b & & & = & 0 & \quad (IIa) \\
 & & & & 0 & = & 0 & \quad (IIIb) = (IIIa)+(IIa)
\end{array}$$

Aus (IIa) folgt $a = \frac{4}{3}b$.

Setzt man dies in (I) ein, so ergibt sich $-23\cdot\frac{4}{3}b + 20b + 16c = 0$, und damit $c = \frac{2}{3}b$.

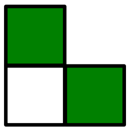
Da die Murmelzahlen stets natürliche Zahlen sein müssen, muss b durch 3 teilbar sein, also $b = 3k$, wobei k eine natürliche Zahl ist.

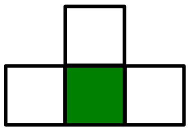
Die Gesamtzahl der Murmeln ist dann $s = a + b + c = \frac{4}{3}\cdot 3k + 3k + \frac{2}{3}\cdot 3k = 9k$, somit kommen nur durch 9 teilbare Gesamtzahlen in Frage.

Zu prüfen ist noch, ob die Vorgehensweise mit allen durch 9 teilbaren Gesamtzahlen möglich ist.
Sei also die Gesamtzahl $s = 9k$.
Die 9k Murmeln werden so verteilt, dass Tamara zu Beginn 4k, Kilian 3k und Konstantin 2k Murmeln hat.
Nachdem Tamara Murmeln abgegeben hat, besitzt
Tamara $\frac{1}{2}\cdot 4k = 2k$, Kilian $3k + \frac{1}{4}\cdot 4k = 4k$ und Konstantin $2k + \frac{1}{4}\cdot 4k = 3k$ Murmeln.
Nach Kilians Abgabe besitzt
Tamara $2k + \frac{1}{4}\cdot 4k = 3k$, Kilian $\frac{1}{2}\cdot 4k = 2k$ und Konstantin $3k + \frac{1}{4}\cdot 4k = 4k$ Murmeln.
Nach Konstantins Abgabe besitzt schließlich
Tamara $3k + \frac{1}{4}\cdot 4k = 4k$, Kilian $2k + \frac{1}{4}\cdot 4k = 3k$ und Konstantin $\frac{1}{2}\cdot 4k = 2k$ Murmeln.
Jeder hat also zum Schluss wieder so viele Murmeln wie zu Beginn und die Vorgehensweise ist für die Gesamtzahl 9k immer möglich.

Aufgabe 6

Aus Quadraten der Seitenlänge 1 werden Figuren der abgebildeten Formen und Färbungen zusammengesetzt. Aus solchen Figuren soll lückenlos und ohne Überlappung ein Quadrat gelegt werden, das eine schachbrettartige Färbung hat.





Bestimme alle möglichen Seitenlängen für ein solches Quadrat.

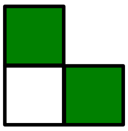
Bemerkung: Eine Färbung heißt schachbrettartig, wenn zwei Quadrate mit gemeinsamer Seite verschieden gefärbt sind.

Lösung:

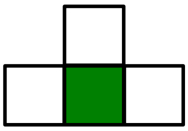
Ein solches Quadrat kann genau dann gelegt werden, wenn die Seitenlänge des Quadrats ein Vielfaches von 10 ist.

Beweisvorschlag:

Man bezeichnet die beiden Figuren als Dreier und Vierer:

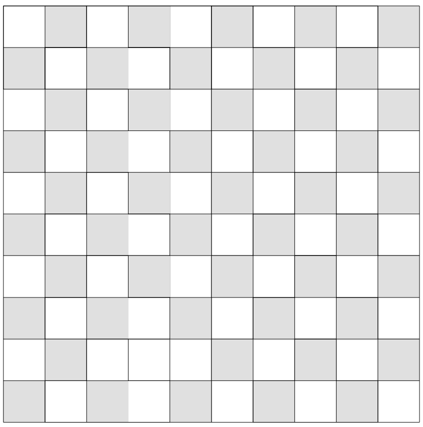


Dreier



Vierer

Teil 1: *Wenn die Kantenlänge ein Vielfaches von 10 ist, dann ist ein Legen mit Dreiern und Vierern möglich.*



Wir legen zwei Dreier und einen Vierer zu einem Rechteck mit den Seitenlängen 2 und 5 zusammen. Anschließend legen wir 10 solche Rechtecke zu einem Quadrat der Seitenlänge 10. Dieses Quadrat ist schachbrettartig gefärbt (s. Abbildung).

Schließlich kann man aus k^2 solchen Quadraten (k = 1, 2, 3, ...) ein Quadrat mit schachbrettartiger Färbung der Seitenlänge 10k legen.

Teil 2: *Wenn ein Legen, wie in der Aufgabe gefordert, möglich ist, dann ist die Seitenlänge des Quadrats ein Vielfaches von 10.*

Sei ein Quadrat der Seitenlänge n vorgegeben, das aus v Vierern und d Dreiern so zusammengelegt ist, dass eine schachbrettartige Färbung vorliegt. Die Anzahl der Einheitsquadrate im großen Quadrat ist dann n^2. Da ein Vierer aus 4 Quadraten und ein Dreier aus 3 Quadraten besteht, gilt also

(1) $n^2 = 4v + 3d$.

Ein Vierer hat ein gefärbtes Quadrat, ein Dreier hat zwei gefärbte Quadrate.
v Vierer und d Dreier haben also zusammen $v + 2d$ gefärbte Quadrate.

Ein Vierer hat drei ungefärbte Quadrate, ein Dreier hat ein ungefärbtes Quadrat.
v Vierer und d Dreier haben also zusammen $3v + d$ ungefärbte Quadrate.

Fall A: n ist gerade.

Wenn n gerade ist, so gibt es bei einer schachbrettartigen Färbung gleich viele gefärbte wie ungefärbte Einheitsquadrate.

Somit gilt

(2) $3v + d = v + 2d$.

Aus (2) folgt $d = 2v$. Setzt man dies in (1) ein, so folgt $n^2 = 4v + 3 \cdot (2v) = 10v$.
Also ist n^2 durch 10 teilbar. Damit n^2 durch 10 teilbar ist, muss die Primfaktorzerlegung von n sowohl die 2 als auch die 5 enthalten. Somit ist auch n durch 10 teilbar.

Fall B: n ist ungerade.

Wenn n ungerade ist, so gibt es bei einer schachbrettartigen Färbung entweder ein gefärbtes Feld mehr oder ein ungefärbtes Feld mehr. Da die Felder nämlich abwechselnd gefärbt oder ungefärbt sind, kann die Differenz zwischen der Anzahl der gefärbten und ungefärbten Felder höchstens eins sein.

Wir nehmen zunächst an, es gäbe ein gefärbtes Feld mehr. Dann ist

(2*) $3v + d + 1 = v + 2d$.

Aus (2*) folgt $d = 2v + 1$. Setzt man dies in (1) ein, so ergibt sich $n^2 = 4v + 3 \cdot (2v + 1) = 10v + 3$.
Somit wäre n^2 eine Quadratzahl mit Einerziffer 3. Man weiß aber, dass es eine solche Quadratzahl mit Einerziffer 3 nicht gibt, denn die Quadratzahlen $0^2, 1^2, 2^2, \cdots .9^2$ haben als Einerziffern die Zahlen 0, 1, 4, 9, 6, 5, 6, 9, 4, 1 aber niemals 3. Diese Einerziffern bleiben bei allen Quadratzahlen dieselben, denn für $n = 10x + z$ ist $n^2 = 10\left(10x^2 + 2xz\right) + z^2$, somit hat n^2 dieselbe Einerziffer wie z^2, wobei z einstellig ist.

Analog schließt man, wenn es ein ungefärbtes Feld mehr gibt. Dann ist

(2**) $3v + d - 1 = v + 2d$.

Aus (2**) folgt $d = 2v - 1$. Setzt man dies in (1) ein, so ergibt sich
$n^2 = 4v + 3 \cdot (2v - 1) = 10v - 3 = 10(v - 1) + 7$. Da v > 0 wäre n^2 eine Quadratzahl mit Einerziffer 7. Wie oben sieht man aber, dass es eine solche Quadratzahl nicht gibt.

Somit ist Fall B unmöglich. Nach Fall A ist aber die Seitenlänge n ein Vielfaches von 10.