Landeswettbewerb Mathematik

Baden-Württemberg
Musterlösungen 2. Runde 2020/2021

Aufgabe 1

Theo nennt eine positive gerade Zahl genial, wenn sie folgende Eigenschaft besitzt:
Egal wie er eine solche Zahl als Summe zweier positiver ungerader Zahlen schreibt, immer ist mindestens einer der beiden Summanden eine Primzahl.
Zeige, dass es eine größte geniale Zahl gibt, und bestimme diese.

Lösung:

Die größte geniale Zahl ist 38.

1. Beweisvorschlag (Fallunterscheidung nach Resten bei Division durch 3):

Zu zeigen ist:
(A) 38 ist genial.
(B) Jede gerade Zahl n, die größer als 38 ist, ist nicht genial.

Zunächst der Beweis von (A):
Die Zahl 38 kann auf folgende Arten als Summe von zwei ungeraden Zahlen geschrieben werden:

$$38 = \mathbf{37} + 1 = 35 + \mathbf{3} = 33 + \mathbf{5} = \mathbf{31} + \mathbf{7} = \mathbf{29} + 9 = 27 + \mathbf{11}$$
$$= 25 + \mathbf{13} = \mathbf{23} + 15 = 21 + \mathbf{17} = \mathbf{19} + \mathbf{19}$$

In jeder Summe ist mindestens ein Summand eine Primzahl. Also ist 38 eine geniale Zahl.

Nun zum Beweis von (B):
Sei $n > 38$ eine gerade natürliche Zahl. Man unterscheidet drei Fälle:

Fall 1: n ist durch 3 teilbar.
Dann ist $a = n - 9$ ebenfalls durch 3 teilbar. Da $n > 38$ ist $a > 3$. Somit ist a keine Primzahl.
Außerdem ist $a = n - 9$ ungerade, denn n ist gerade und 9 ist ungerade. Man hat die Summenzerlegung $n = a + 9$, bei der weder 9 noch a eine Primzahl ist. Also ist n nicht genial.

Fall 2: $n-1$ ist durch 3 teilbar.
Dann ist $a=n-1$ ist eine durch 3 teilbare ungerade Zahl mit $a>3$. Somit ist a keine Primzahl.
Man hat die Summenzerlegung $n=a+1$, bei der weder 1 noch a eine Primzahl ist. Also ist n nicht genial.

Fall 3: $n-2$ ist durch 3 teilbar.
Dann ist $a=n-35$ ebenfalls eine durch 3 teilbare Zahl, denn $a=(n-2)-33$ und sowohl $n-2$ also auch 33 sind durch 3 teilbar. Da $n>38$ gilt $a=n-35>3$. Somit ist die durch 3 teilbare Zahl a keine Primzahl. Da n gerade ist und 35 ungerade, ist $a=n-35$ ungerade.
Man hat in diesem Fall die Summenzerlegung $n=a+35$, bei der weder 35 noch a eine Primzahl ist. Also ist n nicht genial.

Für jede natürliche Zahl n ist entweder n oder $n-1$ oder $n-2$ durch 3 teilbar. Die 3 Fälle decken also alle Möglichkeiten ab. Somit ist jede gerade natürliche Zahl $n>38$ nicht genial. Das ist der Beweis von (B).

Aus (A) und (B) folgt, dass 38 die größte geniale Zahl ist.

2. Beweisvorschlag (mit Fallunterscheidung nach Endziffer):

Wie im 1. Beweisvorschlag müssen die beiden Teilaussagen (A) und (B) bewiesen werden.
Teil (A) wird wie im ersten Beweisvorschlag bewiesen.

Zu (B):
Sei n eine gerade natürliche Zahl mit $n>38$. Dann hat n entweder die Endziffer 0 oder 2 oder 4 oder 6 oder 8.

Fall 1: n hat die Endziffer 0.
Dann ist n durch 5 teilbar und $a=n-25$ ist ebenfalls durch 5 teilbar. Da $n>38$ ist, ist $a=n-25>5$. Somit ist a keine Primzahl. Außerdem ist a ungerade.
Man hat in diesem Fall die Summenzerlegung $n=a+25$, bei der weder 25 noch a eine Primzahl ist. Also ist n nicht genial.

Fall 2: n hat die Endziffer 2.
Dann hat $a=n-27$ die Endziffer 5. Somit ist a durch 5 teilbar. Da $n>38$ ist, ist $a=n-27>5$. Somit ist a keine Primzahl. Außerdem ist a ungerade.
Man hat in diesem Fall die Summenzerlegung $n=a+27$, bei der weder 27 noch a eine Primzahl ist. Also ist n nicht genial.

Fall 3: n hat die Endziffer 4.
Dann hat $a=n-9$ die Endziffer 5. Somit ist a durch 5 teilbar. Da $n>38$ ist, ist $a=n-9>5$. Somit ist a keine Primzahl. Außerdem ist a ungerade.

Man hat in diesem Fall die Summenzerlegung $n = a + 9$, bei der weder 9 noch a eine Primzahl ist. Also ist n nicht genial.

Fall 4: n hat die Endziffer 6.
Dann hat $a = n - 1$ die Endziffer 5. Somit ist a durch 5 teilbar. Da $n > 38$ ist, ist $a = n - 1 > 5$. Somit ist a keine Primzahl. Außerdem ist a ungerade.
Man hat in diesem Fall die Summenzerlegung $n = a + 1$, bei der weder 1 noch a eine Primzahl ist. Also ist n nicht genial.

Fall 5: n hat die Endziffer 8.
Dann hat $a = n - 33$ die Endziffer 5. Somit ist a durch 5 teilbar. Da $n > 38$ ist, ist $a = n - 33 > 5$. Somit ist a keine Primzahl. Außerdem ist a ungerade.
Man hat in diesem Fall die Summenzerlegung $n = a + 33$, bei der weder 33 noch a eine Primzahl ist. Also ist n nicht genial.

Durch die fünf Fälle sind alle Möglichkeiten der Endziffer einer geraden Zahl abgedeckt. Alle geraden Zahlen $n > 38$ sind also nicht genial. Das war zu zeigen.

3. Beweisvorschlag (Reste bei Division durch 6):

Wie im 1. Beweisvorschlag müssen die beiden Teilaussagen (A) und (B) bewiesen werden. Teil (A) wird wie im ersten Beweisvorschlag bewiesen.

Zu (B):
Sei n eine gerade natürliche Zahl mit $n > 38$. Dann ist entweder n oder $n - 2$ oder $n - 4$ gerade und durch 3 teilbar, also durch 6 teilbar.

Fall 1: n ist durch 6 teilbar.
Dann ist $n \geq 42$ und $n - 42$ durch 6 teilbar. Man setzt $a = \frac{n-42}{6}$, also ist $n = 42 + 6 \cdot a = 33 + 3 \cdot (3 + 2a)$ eine Summenzerlegung in zwei ungerade Zahlen, die beide keine Primzahlen sind. Also ist n nicht genial.

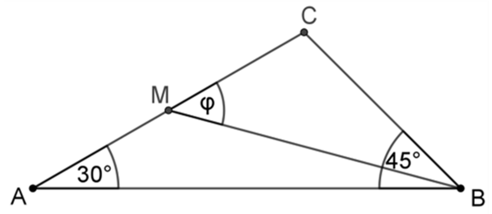
Fall 2: $n - 2$ ist durch 6 teilbar.
Dann ist $n \geq 44$ und $n - 44$ durch 6 teilbar. Man setzt $a = \frac{n-44}{6}$, also ist $n = 44 + 6 \cdot a = 35 + 3 \cdot (3 + 2a)$ eine Summenzerlegung in zwei ungerade Zahlen, die beide keine Primzahlen sind. Also ist n nicht genial.

Fall 3: $n - 4$ ist durch 6 teilbar.
Dann ist $n \geq 40$ und $n - 40$ durch 6 teilbar. Man setzt $a = \frac{n-40}{6}$, also ist $n = 40 + 6 \cdot a = 25 + 3 \cdot (5 + 2a)$ eine Summenzerlegung in zwei ungerade Zahlen, die beide keine Primzahlen sind. Also ist n nicht genial.

In allen drei Fällen ist die gerade Zahl $n > 38$ nicht genial, also ist (B) bewiesen.

Aufgabe 2

In einem Dreieck ABC gilt $\sphericalangle BAC = 30°$ und $\sphericalangle CBA = 45°$.
M ist der Mittelpunkt der Seite $\overline{AC}$.
Bestimme die Größe φ des Winkels $\sphericalangle BMC$.

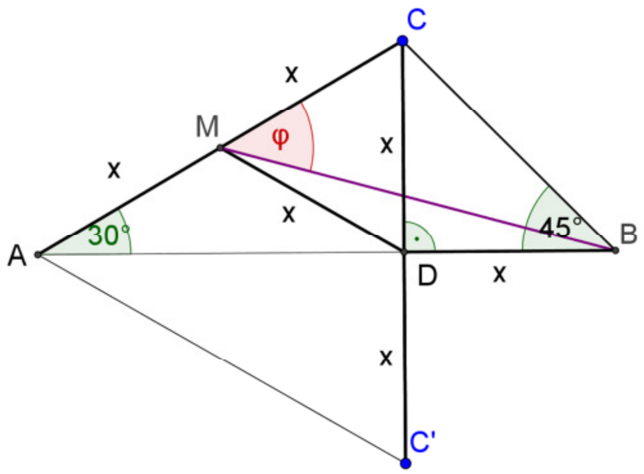


Lösung:

Es gilt $\varphi = 45°$.

1. Beweisvorschlag (mit Spiegelung und gleichseitigen Dreiecken):

Zunächst wird der Punkt C an $\overline{AB}$ gespiegelt. Für den Bildpunkt C' ist D der Schnittpunkt von $\overline{CC'}$ mit $\overline{AB}$.



Behauptung:
Das Dreieck MDB ist gleichschenklig.

Beweis der Behauptung:
Aus den Eigenschaften einer Geradenspiegelung ergibt sich:
1) $\sphericalangle ACC' = \sphericalangle CC'A$
2) $\sphericalangle DAC = \sphericalangle C'AD$
3) D ist der Mittelpunkt der Strecke $\overline{CC'}$.
4) $\sphericalangle CDA = 90°$.

Aus 2) folgt $\sphericalangle C'AC = 60°$. Mit dem Winkelsummensatz für Dreiecke ergibt sich aus 1) $\sphericalangle ACC' = \sphericalangle CC'A = \frac{180° - \sphericalangle C'AC}{2} = 60°$. Das Dreieck $AC'C$ ist also gleichseitig.

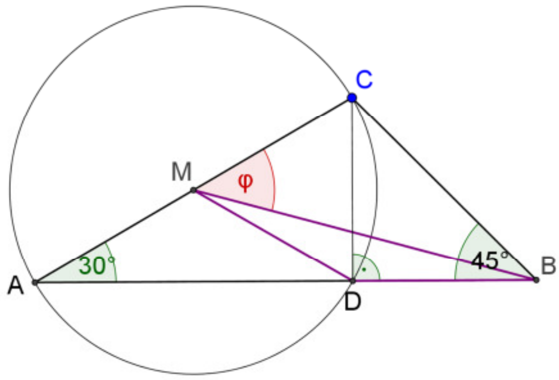
Nach 3) ist $\overline{DC} = \frac{1}{2} \cdot \overline{C'C} = \frac{1}{2} \cdot \overline{AC} = \overline{MC} = x$. Das Dreieck DCM ist also gleichschenklig mit dem Innenwinkel $\sphericalangle MCD = 60°$. Somit ist es ebenfalls gleichseitig und $\overline{MD} = \overline{DC} = x$.

Außerdem ist das Dreieck BCD gleichschenklig-rechtwinklig, denn nach 4) ist $\sphericalangle BDC = 90°$ und nach Aufgabenstellung ist $\sphericalangle CBD = 45°$. Somit $\overline{DB} = \overline{DC} = x$. Es folgt also $\overline{MD} = \overline{DC} = \overline{DB}$. Somit ist das Dreieck MDB gleichschenklig und die Behauptung ist bewiesen.

Nun zurück zum Beweis der Aufgabe. Es ist $\sphericalangle BDM = 90° + 60° = 150°$. Nach dem Winkelsummensatz im gleichschenkligen Dreieck MDB ist $\sphericalangle DMB = \frac{1}{2} \cdot (180° - 150°) = 15°$. Somit $\varphi = \sphericalangle DMC - \sphericalangle DMB = 60° - 15° = 45°$. Das war zu zeigen.

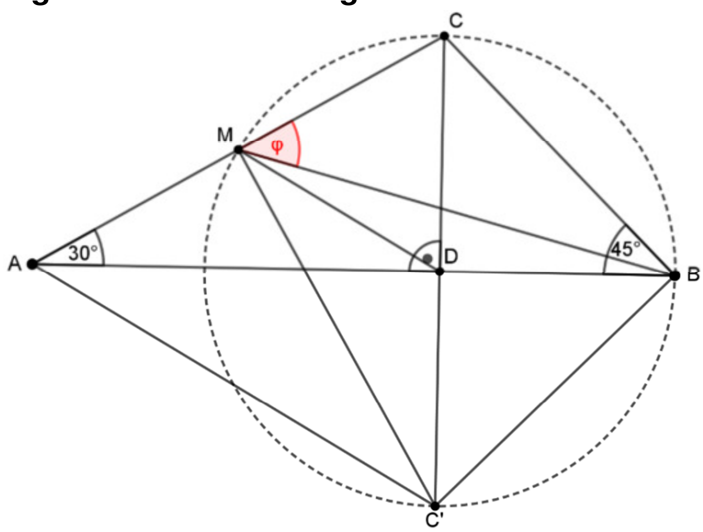
Im Beweisvorschlag 1 wurde der Punkt D als Lotfußpunkt von C auf $\overline{AB}$ definiert und dann die Behauptung bewiesen, dass das Dreieck MDB gleichschenklig ist. Diese Behauptung war der Kern des Beweises. Es gibt mehrere Varianten diese Behauptung zu beweisen, es werden hier drei Varianten dargestellt.

Variante 1 zum Beweis der Behauptung in Beweisvorschlag 1:



Da $\sphericalangle CDA = 90°$, liegt D auf dem Thaleskreis über $\overline{AC}$ (Umkehrung des Satz des Thales). Der Punkt M ist Mittelpunkt dieses Thaleskreises.
Somit $\overline{MD} = \overline{MC} = \overline{AM}$.
Das Dreieck MDC ist also ein gleichschenkliges Dreieck mit Basiswinkel $\sphericalangle MCD = \sphericalangle ACD = 180° - 90° - 30° = 60°$.
Somit ist dieses Dreieck MDC gleichseitig und $\overline{DC} = \overline{MC}$.
Außerdem ist das Dreieck BCD gleichschenklig-rechtwinklig, denn $\sphericalangle BDC = 90°$ und $\sphericalangle DCB = 45°$. Somit $\overline{DB} = \overline{DC}$. Es folgt also $\overline{MD} = \overline{DC} = \overline{DB}$. Also ist das Dreieck MDB gleichschenklig und die Behauptung ist bewiesen.

Variante 2 zum Beweis der Behauptung in Beweisvorschlag 1:



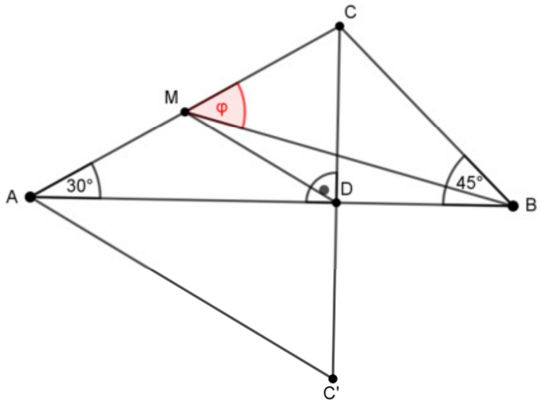
Wie in Beweisvorschlag 1 wird C an AB gespiegelt und gezeigt, dass das Dreieck $AC'C$ gleichseitig ist.

Im gleichseitigen Dreieck $AC'C$ ist $\overline{MC'}$ eine Seitenhalbierende, also auch Mittelsenkrechte. Deshalb gilt $\sphericalangle C'MC = 90°$. Nach der Umkehrung des Satzes von Thales liegen die Punkte M und B auf einem Kreis um den Mittelpunkt D der Strecke CC'.

Daraus folgt $\overline{MD} = \overline{DB}$. Folglich ist das Dreieck MDB ist gleichschenklig. Somit ist die Behauptung bewiesen.
Bei dieser Variante kann φ wie im ersten Beweisvorschlag bestimmt werden oder alternativ auch mit Hilfe des Umfangswinkelsatzes bestimmt werden:
Das Dreieck BCC' ist gleichschenklig-rechtwinklig, d.h. $\sphericalangle BC'C = 45°$. Nach dem Satz vom Umfangswinkel sind im Kreis die Umfangswinkel $\sphericalangle BC'C$ und φ zur Sehne $\overline{BC}$ gleich groß, d.h. $\varphi = \sphericalangle BC'C = 45°$.

Variante 3 zum Beweis der Behauptung in Beweisvorschlag 1:

Wie in Beweisvorschlag 1 wird C an AB gespiegelt und gezeigt, dass das Dreieck $AC'C$ gleichseitig ist.
Die Strecke $\overline{MD}$ verbindet die Mittelpunkte M und D der Dreiecksseiten $\overline{AC}$ und $\overline{CC'}$ des Dreiecks $AC'C$. Nach dem Satz über die Mittelparallele im Dreieck ist $\overline{MD}$ parallel zu $\overline{AC'}$ und es gilt $\overline{MD} = \frac{1}{2} \cdot \overline{AC'} = \overline{CD} = \overline{MC}$.

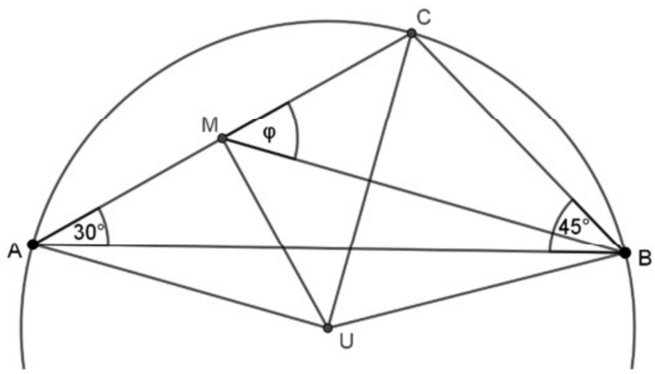


Das Dreieck MDC ist demnach gleichseitig. Insbesondere gilt $\sphericalangle CDM = \sphericalangle DMC = 60°$.
Im gleichschenklig-rechtwinkligen Dreieck DBC gilt $\overline{CD} = \overline{DB}$. Somit $\overline{MD} = \overline{DB}$ und das Dreieck MDB ist gleichschenklig.

2. Beweisvorschlag (mit Umfangswinkelsatz):

In der Abbildung ist der Umkreis des Dreiecks ABC eingezeichnet, der Punkt U ist sein Mittelpunkt.

Zunächst wird gezeigt, dass die Dreiecke UBM und BCM kongruent sind.

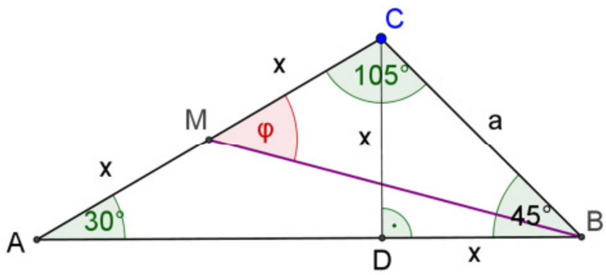


Nach dem Satz vom Mittelpunktswinkel ist der Mittelpunktswinkel $\sphericalangle CUA$ zur Sehne $\overline{AC}$ doppelt so groß wie der Umfangswinkel $\sphericalangle CBA$. Somit gilt $\sphericalangle CUA = 2 \cdot \sphericalangle CBA = 90°$.
Somit ist das Dreieck UCA gleichschenklig-rechtwinklig.
Analog folgt $\sphericalangle BUC = 2 \cdot \sphericalangle BAC = 2 \cdot 30° = 60°$. Also ist das Dreieck UBC gleichseitig.

Da der Umkreismittelpunkt U auf der Mittelsenkrechten der Seite $\overline{AC}$ liegt, ist das Dreieck CMU gleichschenklig-rechtwinklig. Nach dem Kongruenzsatz sss sind Dreiecke UBM und BCM kongruent, denn $\overline{UM} = \overline{MC}$, $\overline{UB} = \overline{BC}$ und $\overline{MB}$ ist gemeinsame Seite.

Aus der Kongruenz folgt $\varphi = \frac{1}{2} \cdot \sphericalangle UMC = \frac{1}{2} \cdot 90° = 45°$.

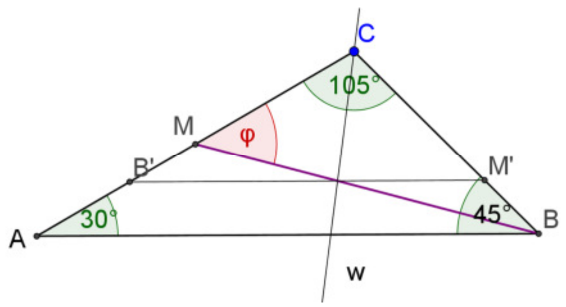
3. Beweisvorschlag (mit Ähnlichkeit):



Man zeigt, dass die Dreiecke ABC und MBC ähnlich sind, also die gleichen Innenwinkel haben.
Sei D der Höhenfußpunkt von C auf $\overline{AB}$.
Wie üblich sei $a = \overline{BC}$ und $b = \overline{AC}$.
Da ADC ein halbes gleichseitiges Dreieck ist, gilt $\overline{DC} = x = \frac{1}{2} \cdot \overline{AC} = \frac{b}{2}$. Nach dem Satz des Pythagoras für das rechtwinklige Dreieck BCD ist $a = 2 \cdot x^2$, also $\frac{a}{x} = \frac{2x}{a} = \frac{b}{a}$.
Somit stimmen die Dreiecke ABC und MBC im Winkel $\gamma = 105°$ bei C und im Verhältnis der an diesen Winkel anschließenden Seiten b und a bzw. a und x überein.

Nun kann man mit dem Ähnlichkeitssatz S:W:S anwenden. Er besagt, dass zwei Dreiecke, die in einem Winkel und im Verhältnis der an diesen Winkel anschließenden Seiten übereinstimmen, ähnlich sind. Somit sind die beiden Dreiecke ABC und MBC ähnlich, wobei die Seite a in Dreieck ABC der Seite $\overline{MC}$ in Dreieck MBC entspricht und die Seite $b = \overline{AC}$ in Dreieck ABC entspricht der Seite a in Dreieck MBC. Der Innenwinkel $\sphericalangle CBA$ im Dreieck ABC entspricht im Dreieck MBC dem Innenwinkel $\sphericalangle BMC$, also
$\varphi = \sphericalangle BMC = \sphericalangle CBA = 45°$.

Kennt man den Ähnlichkeitssatz S:W:S nicht, so kann man den Beweis so führen:



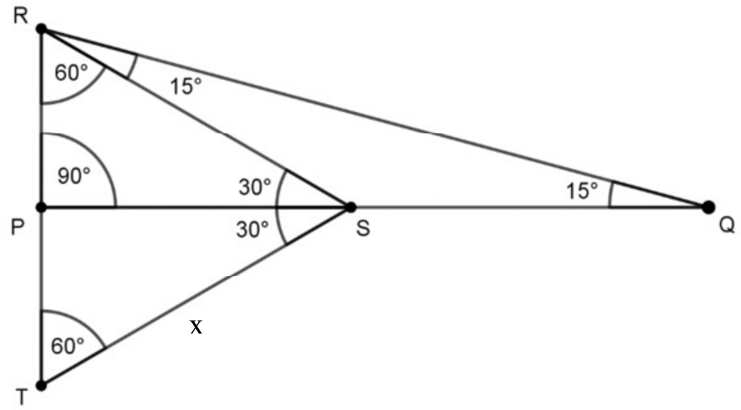
Man spiegelt die Punkte B und M an der Winkelhalbierenden w von γ. Dann liegt B' auf $\overline{AC}$ und M' auf $\overline{BC}$. Außerdem sind die Winkel $\sphericalangle CM'B'$ und $\sphericalangle BMC$ gleich weit.
Da $\frac{a}{x} = \frac{b}{a}$ gilt

$$\frac{\overline{BC}}{\overline{M'C}} = \frac{\overline{AC}}{\overline{B'C}}$$

Nach der Umkehrung des ersten Strahlensatzes sind $\overline{AB}$ und $\overline{B'M'}$ parallel, also sind die Stufenwinkel $\sphericalangle CBA$ und $\sphericalangle CM'B'$ gleich weit. Somit folgt

$$\varphi = \sphericalangle BMC = \sphericalangle CM'B = \sphericalangle CBA = 45°.$$

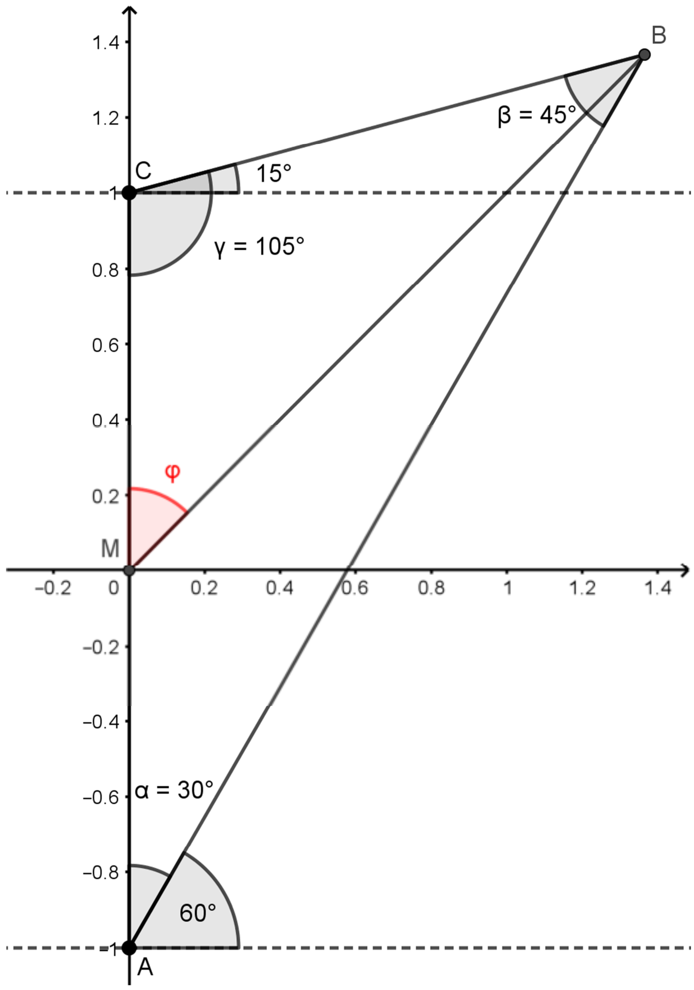
4. Beweisvorschlag (Rechnen im Koordinatensystem):



Vorbemerkung: Bei dem folgenden Beweisvorschlag werden die folgenden trigonometrischen Beziehungen benutzt:

1) $\tan(15°) = 2 - \sqrt{3}$
2) $\tan(60°) = \sqrt{3}$

Begründung: In der Abbildung sei RTS gleichseitig mit Seitenlänge 1LE und RSQ ist gleichschenklig mit Schenkellänge 1LE.
Dann ist $\overline{PS} = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{3}$ und $\overline{PQ} = 1 + \frac{1}{2} \cdot \sqrt{3}$. Somit $\tan(60°) = \frac{\overline{PS}}{\overline{PR}} = \sqrt{3}$ und
$\tan(15°) = \frac{\overline{PR}}{\overline{PQ}} = \frac{0{,}5}{1+0{,}5\cdot\sqrt{3}} = \frac{1}{2+\sqrt{3}} = 2 - \sqrt{3}$.



Nun zum eigentlichen Beweis der Aufgabe.
Das Dreieck ABC wird zunächst in geeigneter Weise in ein kartesisches Koordinatensystem platziert.
Ohne Beschränkung der Allgemeinheit wird dabei $\overline{AC} = 2LE$ gewählt. Der Punkt M liegt im Ursprung, die Punkte A und C haben die Koordinaten $A(0|-1)$ und $C(0|1)$.
Den Punkt B erhält man als Schnittpunkt der Geraden AB und BC mit Hilfe der Winkel $\sphericalangle BAC = 30°$ und $\sphericalangle ACB = 105°$.
Dazu benötigt man die Geradensteigungen $m_{AB} = \tan(60°) = \sqrt{3}$ und $m_{BC} = \tan(15°) = 2 - \sqrt{3}$. Es ergibt sich:
$BC\colon y = \left(2 - \sqrt{3}\right) \cdot x + 1$ und
$AB\colon y = \sqrt{3} \cdot x - 1$.

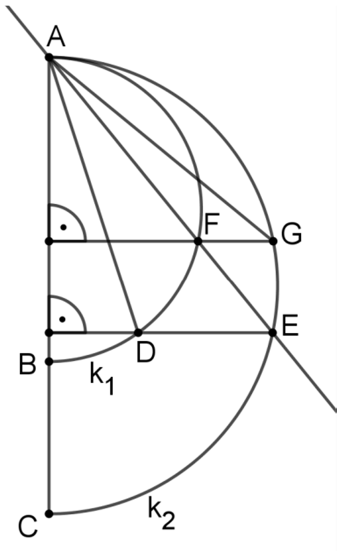
Für die Koordinaten x_B und y_B des Schnittpunktes B der beiden Geraden gilt:
$\left(2 - \sqrt{3}\right) \cdot x_B + 1 = \sqrt{3} \cdot x_B - 1$, also $x_B = \frac{1}{\sqrt{3}-1}$ und $y_B = \sqrt{3} \cdot x_B - 1 = \frac{1}{\sqrt{3}-1}$

Da $x_B = y_B$ liegt B auf der ersten Winkelhalbierenden und daher $\varphi = 45°$.

Bemerkung: Dieser Beweis ist nur korrekt, wenn mit exakten Werten für $\tan(15°)$ und $\tan(60°)$ gerechnet wird und **nicht** mit vom Taschenrechner gerundeten Werten.

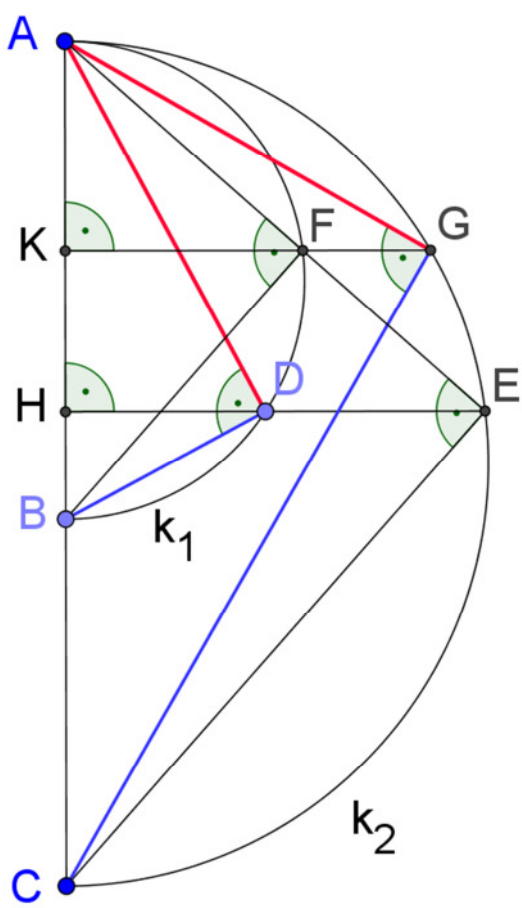
Aufgabe 3

Gegeben sind drei verschiedene Punkte A, B und C, die in dieser Reihenfolge auf einer Geraden liegen. Auf derselben Seite bezüglich AC werden die Halbkreise k_1 und k_2 über den Strecken $\overline{AB}$ bzw. $\overline{AC}$ betrachtet.
Für einen beliebigen von A und B verschiedenen Punkt D auf k_1 schneidet die Lotgerade zu AC durch D den Halbkreis k_2 im Punkt E. Die Gerade AE schneidet k_1 im von A verschiedenen Punkt F und die Lotgerade zu AC durch F schneidet k_2 im Punkt G.
Zeige, dass dann die Strecken AD und AG gleich lang sind.



1. Beweisvorschlag (mit Strahlensatz und Kathetensatz):

Sei H der Schnittpunkt der Lotgeraden zu AC durch D mit AC. Analog sei K der Schnittpunkt der Lotgeraden zu AC durch F mit AC.



Nach dem Satz des Thales sind die Dreiecke ABF und ACE rechtwinklig. Die Stufenwinkel $\sphericalangle AFB$ und $\sphericalangle AEC$ an der Geraden AE haben die gleiche Weite (nämlich 90°). Somit sind $\overline{BF}$ und $\overline{CE}$ parallel.

Nach dem 1. Strahlensatz mit Zentrum A folgt

$$\frac{\overline{AE}}{\overline{AF}} = \frac{\overline{AC}}{\overline{AB}}.$$

Die Lotgeraden auf AC sind ebenfalls parallel. Nach dem 1. Strahlensatz mit Zentrum A folgt

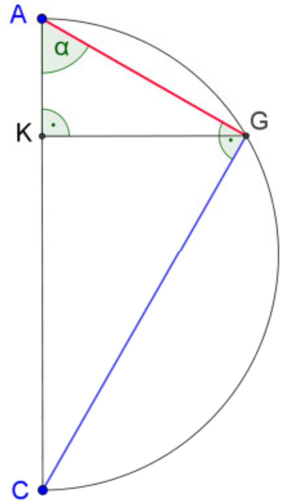
$$\frac{\overline{AE}}{\overline{AF}} = \frac{\overline{AH}}{\overline{AK}}.$$

Zusammen ergibt sich also

$$\frac{\overline{AC}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{AH}}{\overline{AK}}$$

oder $\overline{AC} \cdot \overline{AK} = \overline{AB} \cdot \overline{AH}$.
Nach dem Satz des Thales ist das Dreieck ABD rechtwinklig. Nach dem Kathetensatz gilt $\overline{AD}^2 = \overline{AB} \cdot \overline{AH}$. Analog gilt im rechtwinkligen Dreieck ACG: $\overline{AG}^2 = \overline{AC} \cdot \overline{AK}$.
Aus $\overline{AC} \cdot \overline{AK} = \overline{AB} \cdot \overline{AH}$ folgt nun $\overline{AG}^2 = \overline{AD}^2$. Somit gilt $\overline{AD} = \overline{AG}$. Das war zu beweisen.

Variante: Der Beweis kann auch ohne Kathetensatz geführt werden. Die Beziehung $\overline{AG}^2 = \overline{AC} \cdot \overline{AK}$ ergibt sich aus der nebenstehenden Abbildung wie folgt:



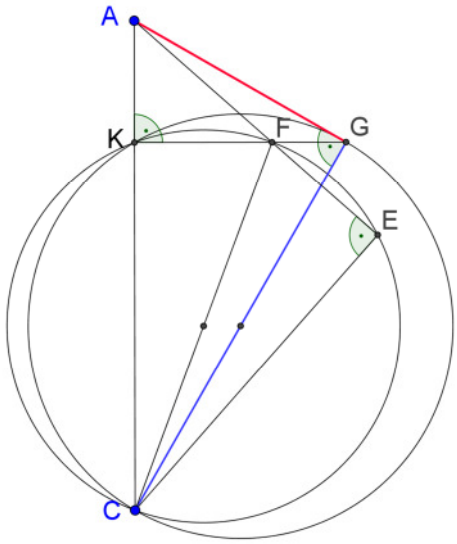
Die Dreiecke AKG und ACG sind beide rechtwinklig mit gleichem Innenwinkel α. Sie sind also ähnlich. Somit gilt

$$\frac{\overline{AK}}{\overline{AG}} = \frac{\overline{AG}}{\overline{AC}}$$

(diese beiden Verhältnisse sind gleich $\cos(\alpha)$).
Somit $\overline{AG}^2 = \overline{AC} \cdot \overline{AK}$. Analog ergibt sich $\overline{AD}^2 = \overline{AB} \cdot \overline{AH}$.

2. Beweisvorschlag (mit Sekantensatz):

Aus Gründen der Übersichtlichkeit wurden die ursprünglichen Halbkreise k_1 und k_2 in den folgenden Zeichnungen weggelassen. Es wurden nur die rechten Winkel eingezeichnet, die sich nach dem Satz des Thales ergeben.
In der Abbildung ist der Thaleskreis über $\overline{CG}$ eingezeichnet. Der Punkt K liegt nach dem Satz des Thales auf diesem Kreis. Die Gerade AG ist eine Tangente von A an den Kreis, da AG senkrecht auf dem Durchmesser $\overline{CG}$ steht. Die Gerade AC ist Sekante von A durch den Kreis. Nach dem Sekanten-Tangenten-Satz gilt

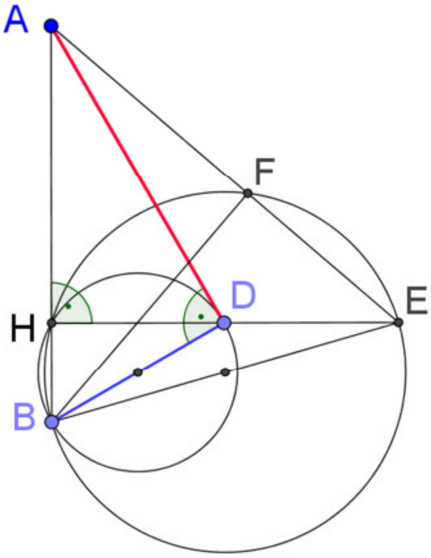


$$\overline{AG}^2 = \overline{AC} \cdot \overline{AK}. \qquad (1)$$

Zusätzlich wurde der Thaleskreis über $\overline{CF}$ eingezeichnet. Die Geraden AE und AC sind Sekanten von A durch den Kreis. Also gilt nach dem Sekantensatz

$$\overline{AC} \cdot \overline{AK} = \overline{AE} \cdot \overline{AF}. \qquad (2)$$

In der nebenstehenden Abbildung ist der Thaleskreis über $\overline{BD}$ eingezeichnet. Der Punkt H liegt nach dem Satz des Thales auf diesem Kreis. Die Gerade AD ist eine Tangente von A an den Kreis, da AG senkrecht auf dem Durchmesser $\overline{BD}$ steht. Die Gerade AB ist Sekante von A durch den Kreis. Nach dem Sekanten-Tangenten-Satz gilt



$$\overline{AD}^2 = \overline{AB} \cdot \overline{AH}. \qquad (3)$$

Zusätzlich wurde der Thaleskreis über $\overline{BE}$ eingezeichnet. Die Geraden AE und AB sind Sekanten von A durch den Kreis. Also gilt nach dem Sekantensatz

$$\overline{AB} \cdot \overline{AH} = \overline{AE} \cdot \overline{AF}. \qquad (4)$$

Aus (1) bis (4) ergibt sich $\overline{AG}^2 = \overline{AC} \cdot \overline{AK} = \overline{AE} \cdot \overline{AF} = \overline{AB} \cdot \overline{AH} = \overline{AD}^2$, also $\overline{AD} = \overline{AG}$.
Das war zu zeigen.

Aufgabe 4

Hans wirft fünf Spielwürfel und schreibt den Wert des Produktes der Augenzahlen auf. Bestimme, wie oft Hans mindestens würfeln muss, damit unter den aufgeschriebenen Zahlen ganz sicher zwei Zahlen sind, deren Produkt eine Quadratzahl ist.

Lösung:

Spätestens nach neun Würfen von Hans sind unter seinen aufgeschrieben Zahlen sicher zwei Zahlen, deren Produkt eine Quadratzahl ist.

Beweisvorschlag:

Zu beweisen sind die folgenden Schritte (A) und (B):

(A) Es ist möglich, dass Hans achtmal mit seinen fünf Würfeln würfelt, ohne dass unter seinen acht aufgeschriebenen Produkten zwei sind, deren Produkt eine Quadratzahl ist.

(B) Wenn Hans neunmal würfelt, so sind unter den neun aufgeschriebenen Zahlen auf jeden Fall zwei, deren Produkt eine Quadratzahl ist.

Beweis von (A):
Hans würfelt z.B. folgende Augenzahlen:

Wurfnummer	Aufgeschriebene Zahl (= Produkt der fünf Augenzahlen)	Mögliche zugehörige fünf Augenzahlen
1	1	1;1;1;1;1
2	2	2;1;1;1;1
3	3	3;1;1;1;1
4	5	5;1;1;1;1
5	6	3;2;1;1;1
6	10	5;2;1;1;1
7	15	5;3;1;1;1
8	30	5;3;2;1;1

Die Produkte von je zwei der acht aufgeschriebenen Zahlen kann man der Tabelle entnehmen:

mal	**1**	**2**	**3**	**5**	**6**	**10**	**15**	**30**
1	x	2	3	5	6	10	15	30
2	2	x	6	10	12	20	30	60
3	3	6	x	15	18	30	45	90
5	5	10	15	x	30	50	75	150
6	6	12	18	30	x	60	90	180
10	10	20	30	50	60	x	150	300
15	15	30	45	75	90	150	x	450
30	30	60	90	150	180	300	450	x

In der Tabelle kommen keine Quadratzahlen vor, also ist durch dieses Beispiel (A) bewiesen.

Beweis von (B):
Bei den sechs Augenzahlen $1, \ldots, 6$ treten nur die Primfaktoren 2, 3 und 5 auf. Somit treten in den Produkten von fünf Augenzahlen, die Hans würfelt und aufschreibt, ebenfalls nur diese Primfaktoren auf. Alle Zahlen, die Hans aufschreibt haben daher die Form $z = 2^a \cdot 3^b \cdot 5^c$ (wobei a, b, c positive ganze Zahlen oder auch 0 sind; wenn ein Primfaktor nicht vorkommt, so setzt man den zugehörigen Exponenten 0, z.B. $1 = 2^0 \cdot 3^0 \cdot 5^0$).

Wenn die Zahlen $z_1 = 2^{a_1} \cdot 3^{b_1} \cdot 5^{c_1}$ und $z_2 = 2^{a_2} \cdot 3^{b_2} \cdot 5^{c_2}$ zwei aufgeschriebene Zahlen sind, so ist ihr Produkt $z_1 \cdot z_2 = 2^{a_1+a_2} \cdot 3^{b_1+b_2} \cdot 5^{c_1+c_2}$. Dieses Produkt ist genau dann eine Quadratzahl, wenn die Exponenten $a_1 + a_2$, $b_1 + b_2$ und $c_1 + c_2$ alle gerade sind:

- Wenn die drei Exponenten gerade sind mit $a_1 + a_2 = 2k$, $b_1 + b_2 = 2m$ und $c_1 + c_2 = 2n$, so ist $z_1 \cdot z_2 = 2^{a_1+a_2} \cdot 3^{b_1+b_2} \cdot 5^{c_1+c_2} = 2^{2k} \cdot 3^{2m} \cdot 5^{2n} = \left(2^k \cdot 3^m \cdot 5^n\right)^2$ eine Quadratzahl.
- Wenn $z_1 \cdot z_2 = 2^{a_1+a_2} \cdot 3^{b_1+b_2} \cdot 5^{c_1+c_2} = q^2$, so hat q aufgrund der Eindeutigkeit der Primfaktordarstellung nur die Primfaktoren 2,3 und 5, also $q = 2^k \cdot 3^m \cdot 5^n$. Aus $2^{a_1+a_2} \cdot 3^{b_1+b_2} \cdot 5^{c_1+c_2} = q^2 = 2^{2k} \cdot 3^{2m} \cdot 5^{2n}$ folgt wegen der Eindeutigkeit der Primfaktorzerlegung $a_1 + a_2 = 2k$, $b_1 + b_2 = 2m$ und $c_1 + c_2 = 2n$. Die Exponenten $a_1 + a_2$, $b_1 + b_2$ und $c_1 + c_2$ sind also alle gerade.

Die Summe $a_1 + a_2$ ist genau dann gerade, wenn entweder a_1 und a_2 beide gerade oder beide ungerade sind. In diesem Fall sagt man: a_1 und a_2 haben die gleiche Parität. Falls a_1 und a_2 nicht die gleiche Parität haben, also eine Zahl gerade und eine Zahl ungerade ist, so ist ihre Summe ungerade. Das Produkt von $z_1 = 2^{a_1} \cdot 3^{b_1} \cdot 5^{c_1}$ und $z_2 = 2^{a_2} \cdot 3^{b_2} \cdot 5^{c_2}$ ist also genau dann eine Quadratzahl, wenn sowohl a_1 und a_2 als auch b_1 und b_2 und auch die beiden Zahlen c_1 und c_2 gleiche Parität haben.
Man muss also für den Beweis von (B) zeigen, dass nach spätestens neun Würfen zwei Zahlen vorkommen, bei denen die drei Exponenten paarweise die gleiche Parität haben. Dazu untersucht man, welche Verteilungen von ungeraden bzw. geraden Zahlen bei den drei Exponenten a, b und c in einer Zahl $z = 2^a \cdot 3^b \cdot 5^c$ möglich sind. Hierbei steht g für gerade, u für ungerade.

Möglichkeit	a	b	c
1	g	g	g
2	g	g	u
3	g	u	g
4	g	u	u
5	u	g	g
6	u	g	u
7	u	u	g
8	u	u	u

Tritt für eine gewürfelte Zahl $z = 2^a \cdot 3^b \cdot 5^c$ z.B. Möglichkeit 6 ein, so ist a ungerade, b gerade und c ungerade, also z.B. $z = 2^1 \cdot 3^2 \cdot 5^3$.
Insgesamt gibt es acht Möglichkeiten für die Verteilung von a, b und c auf gerade bzw. ungerade Zahlen. Bei neun Würfen kommt also nach dem Schubfachprinzip mindestens eine der Möglichkeiten doppelt vor. Es gibt also bei neun Zahlen der Form $2^a \cdot 3^b \cdot 5^c$ auf jeden Fall zwei Zahlen $z_1 = 2^{a_1} \cdot 3^{b_1} \cdot 5^{c_1}$ und $z_2 = 2^{a_2} \cdot 3^{b_2} \cdot 5^{c_2}$ bei denen sowohl a_1, a_2 als auch b_1, b_2 und c_1, c_2 gleiche Parität haben. Daraus folgt, wie oben bewiesen wurde, dass $z_1 \cdot z_2$ eine Quadratzahl ist.
Somit ist (B) bewiesen.