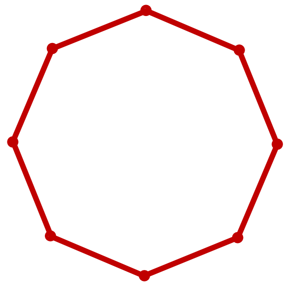
# Landeswettbewerb Mathematik
## Baden-Württemberg
### Musterlösungen 1. Runde 2013/2014

### *Aufgabe 1*

*Wolfgang will die Zahlen 1, 2, 3, …, 8 an die Ecken eines Achtecks schreiben und jede Zahl einmal verwenden. Dabei soll die Summe von je zwei Zahlen, die an benachbarten Ecken stehen, eine Primzahl sein.*



*Welche Möglichkeiten hat Wolfgang, das Achteck so zu beschriften?*

### *Lösung:*

Wolfgang hat die folgenden beiden Möglichkeiten, wenn er einmal im Uhrzeigersinn das Achteck umläuft und bei 3 startet und endet: **3-8-5-6-7-4-1-2-3** oder **3-8-5-2-1-6-7-4-3**. Zusätzlich gibt es jeweils auch die umgekehrte Reihenfolge **3-2-1-4-7-6-5-8-3** bzw. **3-4-7-6-1-2-5-8-3**.

### *Beweisvorschlag:*

Aus einer Summentabelle kann man ablesen, welche Zahlen benachbart sein können:

| + | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | **2** | **3** | ~~4~~ | **5** | ~~6~~ | **7** | ~~8~~ | ~~9~~ |
| 2 | **3** | ~~4~~ | **5** | ~~6~~ | **7** | ~~8~~ | ~~9~~ | ~~10~~ |
| 3 | ~~4~~ | **5** | ~~6~~ | **7** | ~~8~~ | ~~9~~ | ~~10~~ | **11** |
| 4 | **5** | ~~6~~ | **7** | ~~8~~ | ~~9~~ | ~~10~~ | **11** | ~~12~~ |
| 5 | ~~6~~ | **7** | ~~8~~ | ~~9~~ | ~~10~~ | **11** | ~~12~~ | **13** |
| 6 | **7** | ~~8~~ | ~~9~~ | ~~10~~ | **11** | ~~12~~ | **13** | ~~14~~ |
| 7 | ~~8~~ | ~~9~~ | ~~10~~ | **11** | ~~12~~ | **13** | ~~14~~ | ~~15~~ |
| 8 | ~~9~~ | ~~10~~ | **11** | ~~12~~ | **13** | ~~14~~ | ~~15~~ | ~~16~~ |

Die Primzahlen sind in der Tabelle fett markiert.
Der Zeile für 7 entnimmt man, dass nur 7+4 und 7+6 eine Primzahl ist. Also kann die 7 nur neben der 4 bzw. neben der 6 stehen. Es gilt also:
(*) Die 7 muss zwischen 4 und 6 stehen.
(**) Analog muss die 8 zwischen 3 und 5 stehen.

Wegen (**) gibt es also an den Ecken des Achtecks im Uhrzeigersinn die Abfolge 3-8-5 oder die Abfolge 5-8-3. Da wir später die umgekehrte Reihenfolge betrachten, können wir annehmen, dass die Abfolge 3-8-5 ist.
Aus der Tabelle ergibt sich, dass auf 5 nur 2, 6 oder 8 folgen kann. Da die 8 schon verwendet ist, gibt es also zwei Fälle: Entweder folgt 6 oder 2.

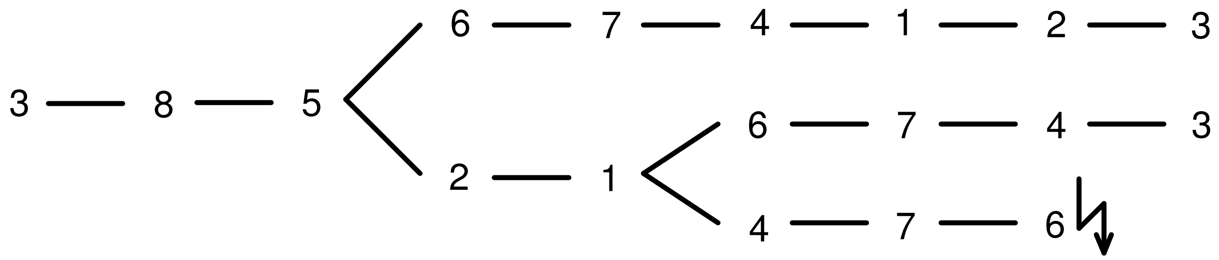
**Fall 1:** Auf 3-8-5 folgt 6, also 3-8-5-6. Da nach (*) 7 zwischen 4 und 6 stehen muss, muss nun 7 und dann 4 folgen. Wir haben also 3-8-5-6-7-4. Auf 4 kann aber nur 1, 3 oder 7 folgen, wobei 3 und 7 schon verwendet sind. Es muss also 1 folgen, wonach nur noch 2 übrig bleibt. Insgesamt ergibt sich also **3-8-5-6-7-4-1-2-3**.
Da auch die Summe am Ende (2+3=5) eine Primzahl ist, sind alle Bedingungen für die Beschriftung des Achtecks erfüllt.

**Fall 2:** Auf 3-8-5 folgt 2, also 3-8-5-2. Neben der 2 kann nun 1, 3 oder 5 stehen. Da 3 und 5 schon verwendet sind, muss nun 1 folgen. Nach der 1 kann man mit 2, 4 oder 6 fortfahren. Da 2 bereits verwendet ist, muss 4 oder 6 folgen.

**Fall 2a:** Die Abfolge ist 3-8-5-2-1-6. Da nach (*) 7 zwischen 4 und 6 stehen muss, ergibt sich die Abfolge **3-8-5-2-1-6-7-4-3**.
Auch hier sind alle Bedingungen erfüllt, es ist also eine zweite Möglichkeit.

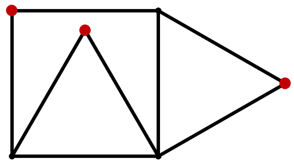
**Fall 2b:** Die Abfolge ist 3-8-5-2-1-4. Da nach (*) 7 zwischen 4 und 6 stehen muss, muss nun unbedingt die 7 folgen, dann die 6. Damit sind alle Zahlen verwendet. Somit ergibt sich 3-8-5-2-1-4-7-6-3. Dies ist aber keine korrekte Lösung, da 6+3=9 keine Primzahl ist. Somit tritt dieser Fall nicht ein.

Den Lösungsweg kann man kurz in einem Baumdiagramm veranschaulichen:




Beginnt die Abfolge mit 5-8-3 beim Umlauf im Uhrzeigersinn, so entsteht daraus die Abfolge 3-8-5 beim Umlauf entgegen dem Uhrzeigersinn. Nach dem obenstehenden Beweis muss die Abfolge entgegen dem Uhrzeigersinn also 3-8-5-6-7-4-1-2-3 oder 3-8-5-2-1-6-7-4-3 sein. Im Uhrzeigersinn ergibt sich also die umgekehrte Abfolge 3-4-7-6-1-2-5-8-3 bzw. 3-2-1-4-7-6-5-8-3.

## Aufgabe 2



*Die nebenstehende Figur besteht aus einem Quadrat und zwei gleichseitigen Dreiecken.*
*Liegen die drei fett markierten Punkte auf einer Geraden?*

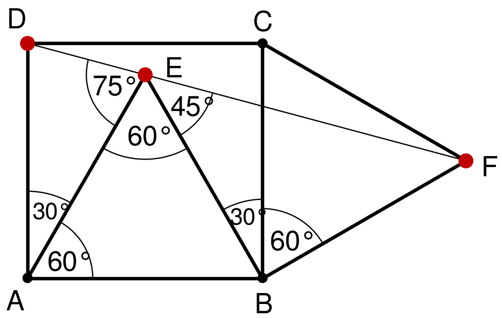
### Lösung:

Die drei fett markierten Punkte liegen auf einer Geraden.

### Vorbemerkung:

Zur Formulierung der Beweise bezeichnen wir die Ecken des Quadrates mit A, B, C und D, die Ecke des gleichseitigen Dreiecks im Innern des Quadrates mit E, die Ecke des gleichseitigen Dreiecks außerhalb des Quadrats mit F.

### 1. Beweisvorschlag (Winkel DEF ist ein gestreckter Winkel):




Weil die Dreiecke ABE und CBF gleichseitig sind, haben alle ihre Innenwinkel die Weite 60°.

Da die Innenwinkel im Quadrat 90° betragen, ergibt sich $\sphericalangle$ EAD = 90° – 60° = 30°.

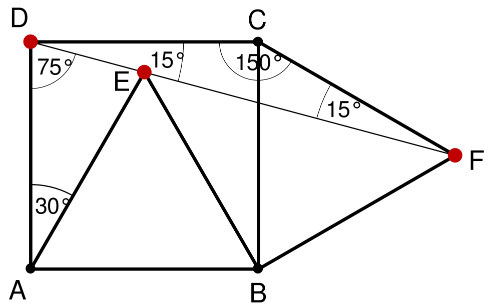
Da alle gegebenen Strecken gleich lang sind, ist insbesondere das Dreieck AED gleichschenklig mit Basis DE.

Aus dem Spitzenwinkel $\sphericalangle$ EAD = 30° berechnet man die Weite des Basiswinkels DEA zu

$\sphericalangle \text{DEA} = \dfrac{180° - 30°}{2} = 75°.$

Auch das Dreieck BFE ist gleichschenklig. Die Weite seines Spitzenwinkels ist $\sphericalangle$ FBE = (90° – 60°) + 60° = 90°. Die Weite des Basiswinkels BEF ist also $\sphericalangle$ BEF = 45°.
Somit ergibt sich $\sphericalangle$ DEF = $\sphericalangle$ DEA + $\sphericalangle$ AEB + $\sphericalangle$ BEF = 75° + 60° + 45° = 180°.
Somit ist der Winkel DEF ein gestreckter Winkel und die Punkte D, E und F liegen auf einer Geraden.

### 2. Beweisvorschlag (die Winkel EDC und FDC sind gleich weit):




Nach Konstruktion ist das Dreieck CDF gleichschenklig mit Spitzenwinkel
$\sphericalangle$ DCF = $\sphericalangle$ DCB + $\sphericalangle$ BCF = 90° + 60° = 150°.
Also gilt für den Basiswinkel FDC:

$\sphericalangle \text{FDC} = \dfrac{180° - 150°}{2} = 15°.$

Das Dreieck AED ist gleichschenklig mit Basis DE und Spitzenwinkel $\sphericalangle$ EAD = 90° – 60° = 30°.

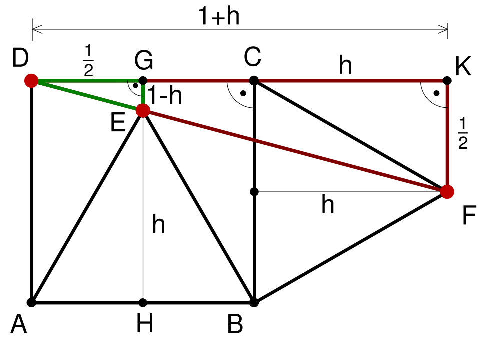
Hieraus berechnet man den Basiswinkel im Dreieck AED zu

$\sphericalangle ADE = \dfrac{180° - 30°}{2} = 75°$. Es folgt $\sphericalangle EDC = \sphericalangle ADC - \sphericalangle ADE = 90° - 75° = 15°$.

Es ist also tatsächlich $\sphericalangle EDC = \sphericalangle FDC$. Somit liegen die Punkte D, E und F auf einer Geraden.

## *3. Beweisvorschlag (mit Ähnlichkeit):*

Ohne Beschränkung der Allgemeinheit hat jede Quadratseite die Länge 1. Die Länge einer Höhe im gleichseitigen Dreieck werde mit h bezeichnet.



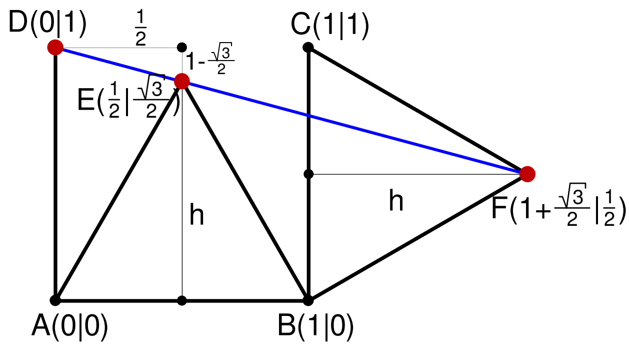

Nach dem Satz von Pythagoras gilt im rechtwinkligen Dreieck EAH $1^2 - h^2 = \left(\dfrac{1}{2}\right)^2$ oder

$(1-h)\cdot(1+h) = \left(\dfrac{1}{2}\right)^2$.

Dies ist äquivalent zu $(1-h) : \dfrac{1}{2} = \dfrac{1}{2} : (1+h)$.

Das bedeutet, dass die Längen der Katheten in den Dreiecken DEG und DFK im gleichen Verhältnis stehen. Folglich sind diese beiden Dreiecke ähnlich.
Deshalb sind die Winkel $\sphericalangle EDG$ und $\sphericalangle FDK$ gleich weit und E liegt auf der Geraden AF.

## *4. Beweisvorschlag (mit Koordinatensystem):*




Wir legen über die Figur ein Koordinatensystem, so dass die Ecken des Quadrates die Koordinaten A(0|0), B(1|0), C(1|1) und D(0|1) haben.
Im gleichseitigen Dreieck mit Seitenlänge a hat die Höhe die Länge $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$a, denn

$$\left(\frac{a}{2}\right)^2 + h^2 = a^2 \Rightarrow h = \sqrt{a^2 - \frac{a^2}{4}} = \frac{\sqrt{3}}{2}a.$$

Somit haben die Punkte E und F die Koordinaten $E(\frac{1}{2}|\frac{\sqrt{3}}{2})$ und $F(1+\frac{\sqrt{3}}{2}|\frac{1}{2})$.

Die Gerade DE hat die Steigung $-\left(1-\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right) : \dfrac{1}{2} = -(2-\sqrt{3}) = \sqrt{3} - 2$, somit die Gleichung

$y = (\sqrt{3} - 2)\cdot x + 1$. Der Punkt $F(x_F|y_F) = F(1+\frac{\sqrt{3}}{2}|\frac{1}{2})$ liegt auf dieser Geraden, denn

$$(\sqrt{3}-2)\cdot x_F + 1 = (\sqrt{3}-2)\cdot\left(1+\frac{\sqrt{3}}{2}\right) + 1 = \sqrt{3} - 2 + \frac{3}{2} - \sqrt{3} + 1 = -\frac{1}{2} + 1 = \frac{1}{2} = y_F.$$

Somit liegen die drei Punkte auf einer Geraden.

## *Aufgabe 3*

*Josef addiert zwei zufällig ausgewählte dreistellige Zahlen.*
*Mit welcher Wahrscheinlichkeit gibt es dabei mindestens einen Übertrag?*

## *Lösung:*

Die Wahrscheinlichkeit für mindestens einen Übertrag ist $\frac{779}{900} \approx 86{,}6\%$.

### *1. Beweisvorschlag (über Gegenereignis):*

Wenn es **nicht** mindestens einen Übertrag gibt, so gibt es keinen einzigen Übertrag – weder an der Einerstelle, noch an der Zehnerstelle oder der Hunderterstelle.

Wir stellen uns dazu vor, dass Josef die beiden dreistelligen Zahlen übereinander schreibt, es gibt also eine obere Zahl (OZ) und eine untere Zahl (UZ).

**Wahrscheinlichkeit für keinen Übertrag bei der Einerziffer**

Für die Einerziffern der beiden dreistelligen Zahlen, die Josef addiert, gibt es je 10 Möglichkeiten, nämlich jeweils die Ziffern 0,1,…,9. Insgesamt gibt es also 10·10=100 Möglichkeiten. Es entsteht kein Übertrag, wenn die Summe der Einerziffern der oberen und der unteren Zahl kleinergleich 9 ist.
Für welche Einerziffern dies der Fall ist, ergibt sich aus der folgenden Tabelle für die Einerziffern:

| OZ→ UZ↓ | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| **0** | kÜ | kÜ | kÜ | kÜ | kÜ | kÜ | kÜ | kÜ | kÜ | kÜ |
| **1** | kÜ | kÜ | kÜ | kÜ | kÜ | kÜ | kÜ | kÜ | kÜ | |
| **2** | kÜ | kÜ | kÜ | kÜ | kÜ | kÜ | kÜ | kÜ | | |
| **3** | kÜ | kÜ | kÜ | kÜ | kÜ | kÜ | kÜ | | | |
| **4** | kÜ | kÜ | kÜ | kÜ | kÜ | kÜ | | | | |
| **5** | kÜ | kÜ | kÜ | kÜ | kÜ | | | | | |
| **6** | kÜ | kÜ | kÜ | kÜ | | | | | | |
| **7** | kÜ | kÜ | kÜ | | | | | | | |
| **8** | kÜ | kÜ | | | | | | | | |
| **9** | kÜ | | | | | | | | | |

In 10+9+8+7+6+5+4+3+2+1 = 55 der 100 Möglichkeiten gibt es also keinen Übertrag.

Die Wahrscheinlichkeit für keinen Übertrag ist also $\frac{55}{100} = \frac{11}{20}$.

**Wahrscheinlichkeit für keinen Übertrag bei der Zehnerziffer unter der Voraussetzung, dass es keinen Übertrag bei der Einerziffer gibt**

Wenn es keinen Übertrag bei der Einerziffer gibt, so ist die Situation bei der Zehnerziffer völlig analog wie bei der Einerziffer. Es gibt also 100 Möglichkeiten für die beiden Zehnerziffern, in 55 dieser 100 Möglichkeiten gibt es keinen Übertrag bei der Zehnerziffer.

Die Wahrscheinlichkeit für keinen Übertrag ist also wieder $\frac{55}{100} = \frac{11}{20}$.

**Wahrscheinlichkeit für keinen Übertrag bei der Hunderterziffer unter der Voraussetzung, dass es keinen Übertrag bei der Zehnerziffer gibt**

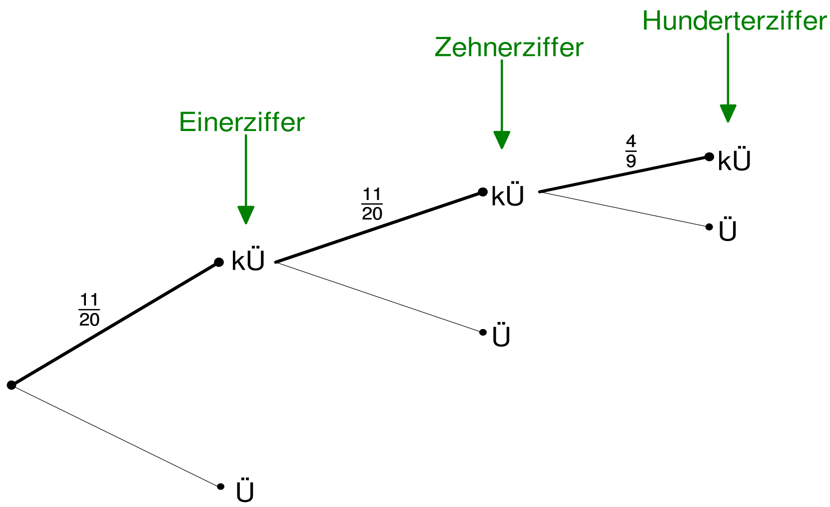
Für die Hunderterziffer ist die „0“ nicht erlaubt, da die beiden Zahlen, die Josef addiert, dreistellig sein sollen. Es gibt hier also nur noch 9 Ziffern, somit also nur 9·9 = 81 Möglichkeiten. Die Tabelle für die Hunderterziffer sieht also so aus, wenn es keinen Übertrag bei der Zehnerziffer gibt:

| **OZ→ UZ↓** | **1** | **2** | **3** | **4** | **5** | **6** | **7** | **8** | **9** |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| **1** | kÜ | kÜ | kÜ | kÜ | kÜ | kÜ | kÜ | kÜ | |
| **2** | kÜ | kÜ | kÜ | kÜ | kÜ | kÜ | kÜ | | |
| **3** | kÜ | kÜ | kÜ | kÜ | kÜ | kÜ | | | |
| **4** | kÜ | kÜ | kÜ | kÜ | kÜ | | | | |
| **5** | kÜ | kÜ | kÜ | kÜ | | | | | |
| **6** | kÜ | kÜ | kÜ | | | | | | |
| **7** | kÜ | kÜ | | | | | | | |
| **8** | kÜ | | | | | | | | |
| **9** | | | | | | | | | |

In 8+7+6+5+4+3+2+1 = 36 der 81 Möglichkeiten gibt es keinen Übertrag.

Die Wahrscheinlichkeit für keinen Übertrag ist also hier $\frac{36}{81} = \frac{4}{9}$.

Das Baumdiagramm mit Wahrscheinlichkeiten hat somit folgende Gestalt:




Die Wahrscheinlichkeit für keinen einzigen Übertrag ist also nach Pfadregel $\frac{11}{20} \cdot \frac{11}{20} \cdot \frac{4}{9} = \frac{121}{900}$.

Die Wahrscheinlichkeit für mindestens einen Übertrag ist demnach $1 - \frac{121}{900} = \frac{779}{900} \approx 86{,}6\%$.

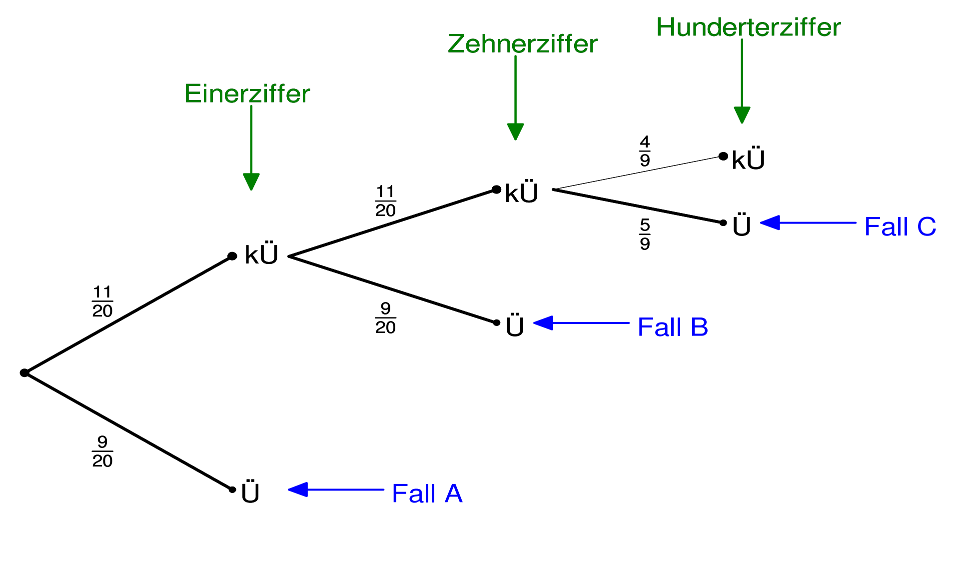
## 2. Beweisvorschlag (mit verkürztem Baumdiagramm):

Wenn es mindestens einen Übertrag gibt, so gibt es die folgenden drei Fälle:
Fall A: Es gibt einen Übertrag bei den Einerziffern.

Fall B: Es gibt keinen Übertrag bei den Einerziffern, aber einen Übertrag bei den Zehnerziffern.

Fall C: Es gibt keinen Übertrag bei den Einerziffern und den Zehnerziffern, aber einen Übertrag bei den Hunderterziffern.

Das zugehörige Baumdiagramm mit Wahrscheinlichkeiten wie im 1. Beweisvorschlag folgende Gestalt:

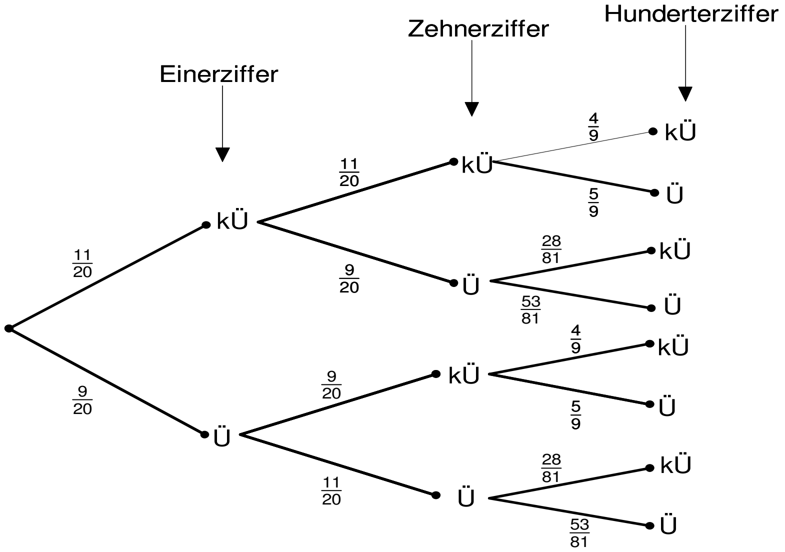



Fall A hat die Wahrscheinlichkeit $1-\frac{11}{20}=\frac{9}{20}$,
Fall B hat nach Pfadregel die Wahrscheinlichkeit $\frac{11}{20}\cdot\frac{9}{20}=\frac{99}{400}$,
Fall C die Wahrscheinlichkeit $\frac{11}{20}\cdot\frac{11}{20}\cdot\frac{5}{9}=\frac{121}{720}$.

Die Fälle A, B und C schließen sich gegenseitig aus, die Gesamtwahrscheinlichkeit für mindestens einen Übertrag ist also die Summe der Wahrscheinlichkeiten für die drei Fälle: $\frac{9}{20}+\frac{99}{400}+\frac{121}{720}=\frac{779}{900}$.

## 3. Beweisvorschlag (mit vollem Baumdiagramm):

Das volle Baumdiagramm für Überträge hat folgende Gestalt:



In diesem Baumdiagramm kommen zwei Wahrscheinlichkeiten vor, die in den vorigen Beweisvorschlägen noch nicht berechnet wurden:
1) Wahrscheinlichkeit für einen Übertrag der Zehnerziffern unter der Voraussetzung, dass es einen Übertrag der Einerziffern gibt und
2) Wahrscheinlichkeit eines Übertrags der Hunderterziffern unter der Voraussetzung, dass es einen Übertrag der Zehnerziffern gibt.
Diese beiden Wahrscheinlichkeiten werden wie folgt berechnet:

1) Tabelle für den Übertrag der Zehnerziffer, unter der Voraussetzung dass es einen Übertrag der Einerziffer gibt:

| OZ → / UZ ↓ | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| **0** | | | | | | | | | | Ü |
| **1** | | | | | | | | | Ü | Ü |
| **2** | | | | | | | | Ü | Ü | Ü |
| **3** | | | | | | | Ü | Ü | Ü | Ü |
| **4** | | | | | | Ü | Ü | Ü | Ü | Ü |
| **5** | | | | | Ü | Ü | Ü | Ü | Ü | Ü |
| **6** | | | | Ü | Ü | Ü | Ü | Ü | Ü | Ü |
| **7** | | | Ü | Ü | Ü | Ü | Ü | Ü | Ü | Ü |
| **8** | | Ü | Ü | Ü | Ü | Ü | Ü | Ü | Ü | Ü |
| **9** | Ü | Ü | Ü | Ü | Ü | Ü | Ü | Ü | Ü | Ü |

Wahrscheinlichkeit für Übertrag der Zehnerziffer, unter der Voraussetzung dass es einen Übertrag der Einerziffer gibt: $\frac{55}{100} = \frac{11}{20}$.

Wahrscheinlichkeit für keinen Übertrag: $1 - \frac{11}{20} = \frac{9}{20}$.

2) Tabelle für den Übertrag der Hunderterziffer, unter der Voraussetzung dass es einen Übertrag der Zehnerziffer gibt:

| OZ → / UZ ↓ | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| **1** | | | | | | | | Ü | Ü |
| **2** | | | | | | | Ü | Ü | Ü |
| **3** | | | | | | Ü | Ü | Ü | Ü |
| **4** | | | | | Ü | Ü | Ü | Ü | Ü |
| **5** | | | | Ü | Ü | Ü | Ü | Ü | Ü |
| **6** | | | Ü | Ü | Ü | Ü | Ü | Ü | Ü |
| **7** | | Ü | Ü | Ü | Ü | Ü | Ü | Ü | Ü |
| **8** | Ü | Ü | Ü | Ü | Ü | Ü | Ü | Ü | Ü |
| **9** | Ü | Ü | Ü | Ü | Ü | Ü | Ü | Ü | Ü |

Wahrscheinlichkeit für einen Übertrag der Hunderterziffer, unter der Voraussetzung dass es einen Übertrag der Zehnerziffer gibt: $\frac{53}{81}$.

Wahrscheinlichkeit für keinen Übertrag: $1 - \frac{53}{81} = \frac{28}{81}$.

Damit sind alle Wahrscheinlichkeiten im obigen Baumdiagramm berechnet.

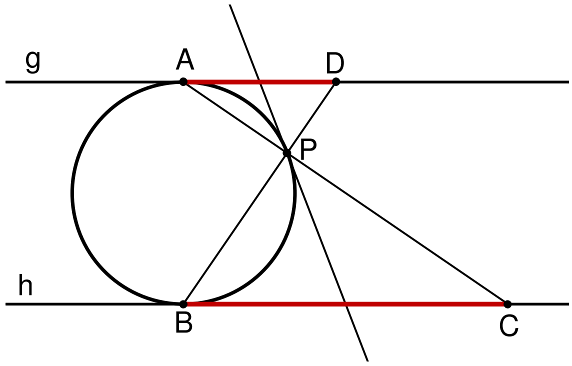
Alle fett markierten Pfade im Baumdiagramm enthalten mindestens einen Übertrag. Die Summe der Wahrscheinlichkeiten ist also nach der Pfadregel:

$$\frac{11}{20}\cdot\frac{11}{20}\cdot\frac{5}{9}+\frac{11}{20}\cdot\frac{9}{20}\cdot\frac{28}{81}+\frac{11}{20}\cdot\frac{9}{20}\cdot\frac{53}{81}+\frac{9}{20}\cdot\frac{9}{20}\cdot\frac{4}{9}+\frac{9}{20}\cdot\frac{9}{20}\cdot\frac{5}{9}+\frac{9}{20}\cdot\frac{11}{20}\cdot\frac{28}{81}+\frac{9}{20}\cdot\frac{11}{20}\cdot\frac{53}{81}=\frac{779}{900}.$$

Dies war zu zeigen.

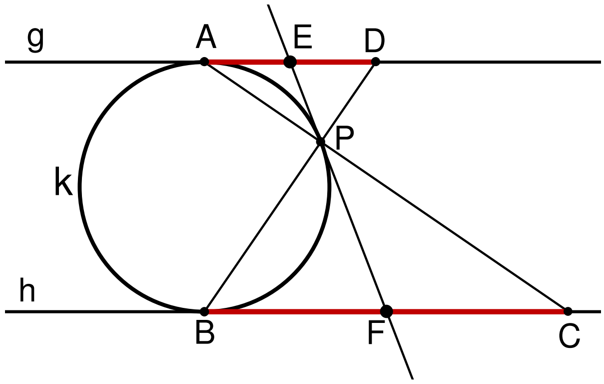
## Aufgabe 4

Ein Kreis berührt die Parallelen g und h in den Punkten A und B. Zwei Verbindungsstrecken AC und BD der Parallelen schneiden sich auf dem Kreis im Punkt P.
Zeige: Die Kreistangente durch P halbiert die Strecken AD und BC.



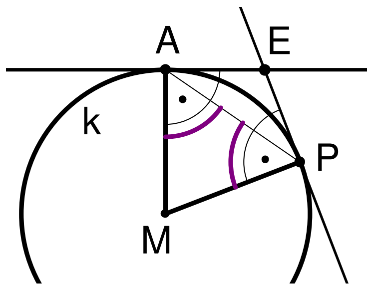

### 1. Beweisvorschlag (mit Tangentenabschnitten):

Sei E der Schnittpunkt der Tangenten mit g, F der Schnittpunkt der Tangenten mit h.
Die Gerade g ist vom Punkt E aus eine Tangente an den Kreis k, der Punkt A ist der Berührpunkt dieser Tangente. Man nennt daher EA einen *Tangentenabschnitt*.
Ebenso sind EP, FP und FB Tangentenabschnitte.




***Behauptung:***
*Die beiden Tangentenabschnitte von einem äußeren Punkt an einen Kreis k sind gleich lang.*

***Beweis der Behauptung:***
Wir beweisen die Behauptung für die beiden Tangentenabschnitte EA und EP.
Da A und P auf dem Kreis k um den Mittelpunkt M liegen, ist das Dreieck MPA gleichschenklig. Somit sind die Basiswinkel $\sphericalangle APM$ und $\sphericalangle MAP$ gleich weit. Da MA ein Radius des Kreises ist und EA ein Tangentenabschnitt, stehen EA und MA senkrecht aufeinander.

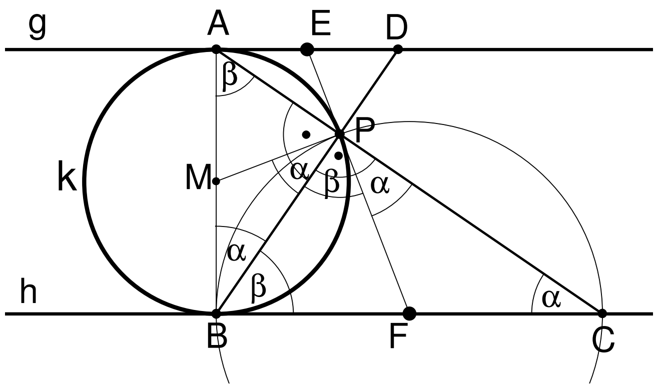



Folglich $\sphericalangle EPA = 90° - \sphericalangle APM$. Analog $\sphericalangle PAE = 90° - \sphericalangle MAP$. Somit $\sphericalangle EPA = \sphericalangle PAE$.
Daher ist das Dreieck PEA gleichschenklig. Folglich sind die beiden Schenkel EA und EP gleich lang und die Behauptung ist bewiesen.

Nach der Behauptung gilt
$\overline{EA} = \overline{EP}$ (1) und
$\overline{FB} = \overline{FP}$ (2).
Nach (2) ist das Dreieck FPB gleichschenklig. Folglich $\sphericalangle FBP = \sphericalangle BPF$.
Nun ist aber $\sphericalangle FBP = \sphericalangle EDP$ (Wechselwinkel an den Parallelen g und h) und
$\sphericalangle BPF = \sphericalangle DPE$ (Scheitelwinkel bei P).
Damit hat das Dreieck PDE gleich weite Winkel bei D und P, ist also gleichschenklig mit Basis PD. Hieraus folgt $\overline{EP} = \overline{ED}$ (3).
Aus (1) und (3) folgt nun sofort $\overline{EA} = \overline{ED}$, d.h. E halbiert die Strecke AD.

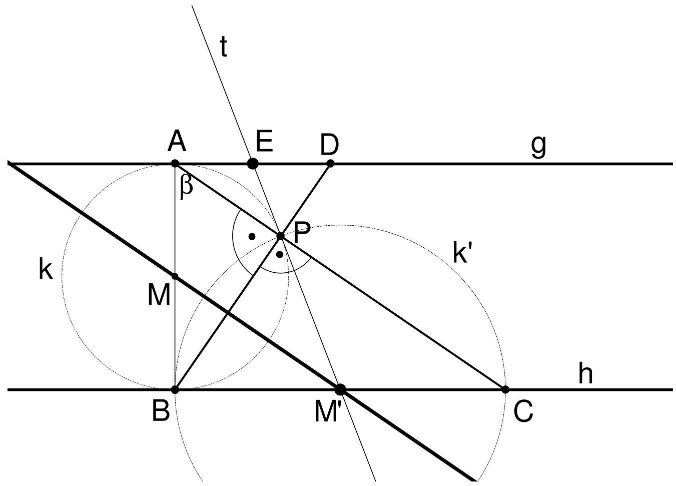
Nach (1) ist das Dreieck PEA gleichschenklig. Folglich $\sphericalangle EPA = \sphericalangle PAE$.
Nun ist aber $\sphericalangle PAE = \sphericalangle PCF$ (Wechselwinkel an den Parallelen g und h) und $\sphericalangle EPA = \sphericalangle FPC$ (Scheitelwinkel bei P).
Damit hat das Dreieck PFC gleich weite Winkel bei C und P, ist also gleichschenklig mit Basis PC. Hieraus folgt $\overline{FP} = \overline{FC}$ (4).
Aus (2) und (4) folgt nun sofort $\overline{FB} = \overline{FC}$, d.h. F halbiert die Strecke BC.

## *2. Beweisvorschlag (mit Thalessatz):*



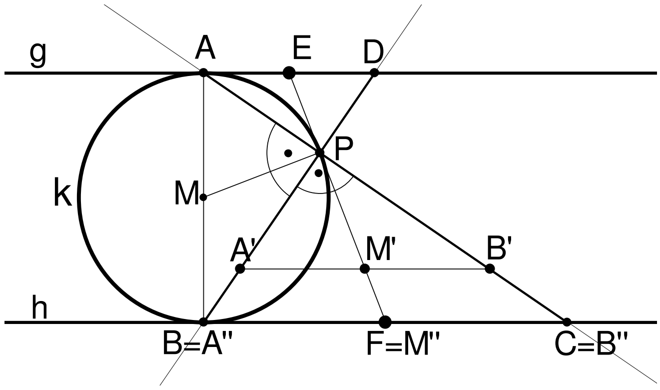

Da g und h parallele Tangenten an den Kreis k sind und A, B die zugehörigen Berührpunkte, ist AB ein Durchmesser des Kreis k. Nach dem Satz des Thales ist $\sphericalangle APB = 90°$. Somit ist auch $\sphericalangle BPC = 90°$, denn C liegt auf AP. Also liegt auch P auf dem Thaleskreis über BC.
Da EF als Tangente senkrecht auf dem Radius MP steht, ist auch $\sphericalangle MPF = 90°$.
Das Dreieck MBP ist gleichschenklig, also $\alpha = \sphericalangle PBM = \sphericalangle MPB$.
Es folgt $\beta = 90° - \alpha = \sphericalangle BPF = \sphericalangle FBP$. Somit ist auch Dreieck BFP gleichschenklig.
Ebenso $\alpha = 90° - \beta = \sphericalangle FPC = \sphericalangle PCF$. Also ist auch Dreieck PFC gleichschenklig.
Somit $\overline{FC} = \overline{FP} = \overline{FB}$ und F halbiert BC. Analog halbiert E die Strecke AD.

## *3. Beweisvorschlag (mit Symmetrie):*




Wie im 2. Beweisvorschlag liegt P auf dem Thaleskreis k über AB und auf dem Thaleskreis k‘ über BC.
Die Kreise k und k‘ und ihre Schnittpunkte B und P sind bezüglich der Geraden MM‘ durch die beiden Kreismittelpunkte M und M‘ symmetrisch.
Deshalb sind auch die beiden Tangenten h und t, die k in B bzw. P berühren, bezüglich dieser Symmetrieachse symmetrisch. Sie schneiden sich folglich auf dieser Symmetrieachse.
Der Schnittpunkt von h und MM‘ ist aber M‘.
Deshalb verläuft auch die Tangente t durch M‘, den Mittelpunkt der Strecke BC.
Analog zeigt man, dass t auch die Strecke AD halbiert.

## *4. Beweisvorschlag (mit Drehstreckung):*




Da AB ein Durchmesser des Kreises k ist, ist AP nach dem Satz des Thales senkrecht zu BP.
Dreht man das Dreieck ABP gegen den Uhrzeigersinn um P um 90°, so liegt also der Bildpunkt A‘ von A auf der Geraden BP, ebenso liegt B‘ auf AP = PC.
Da MP ein Radius ist, ist die Tangente EF senkrecht zu MP. Also liegt der Bildpunkt M‘ von M auf EF.
Da AB senkrecht zu BC ist, ist A‘B‘ parallel zu BC. Durch eine zentrische Streckung mit Zentrum P geht A‘B‘ in BC über, d.h. A‘‘ = B, B‘‘ = C. Die Gerade EF durch P geht durch diese Streckung in sich über, der Punkt M‘ auf A‘B‘ wird also auf F abgebildet, d.h. M‘‘ = F.
Da M der Mittelpunkt von AB ist, ist M‘ der Mittelpunkt von A‘B‘ und nach der zentrischen Streckung M‘‘ der Mittelpunkt auf A‘‘B‘‘. Also ist F der Mittelpunkt von BC.
Analog ist E der Mittelpunkt von AD.

## *Aufgabe 5*

*Die Diagonalen eines konvexen Vierecks zerlegen dieses in vier Teildreiecke. Die Schwerpunkte dieser Teildreiecke bilden ein neues Viereck.*

*Welcher Anteil der ursprünglichen Vierecksfläche wird durch das neue Viereck überdeckt?*

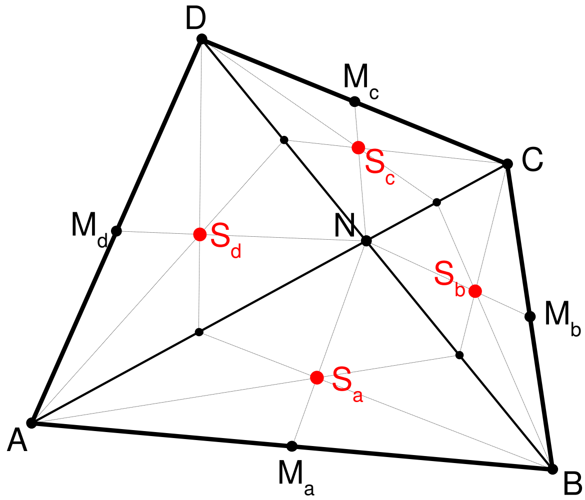
## *Lösung:*

Der Flächeninhalt des neuen Vierecks beträgt $\frac{2}{9}$ des Flächeninhalts des ursprünglichen Vierecks.

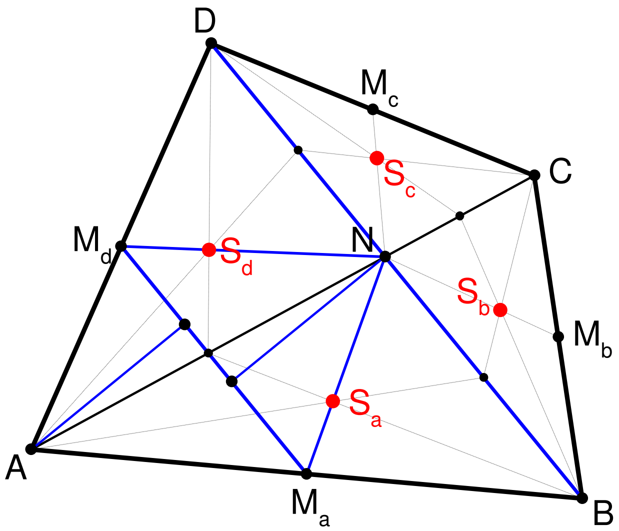
## *Beweisvorschlag:*

Wir bezeichnen

- die Eckpunkte des Ausgangsvierecks mit A, B, C, D,
- die Mittelpunkte seiner Seiten mit $M_a$, $M_b$, $M_c$, $M_d$,
- den Diagonalenschnittpunkt mit N,
- die Schwerpunkte der Dreiecke mit $S_a$, $S_b$, $S_c$, $S_d$.
  Diese Schwerpunkte sind bekanntlich die Schnittpunkte der Seitenhalbierenden der jeweiligen Dreiecke. Diese Seitenhalbierenden sind in der nebenstehenden Abbildung gestrichelt eingezeichnet.



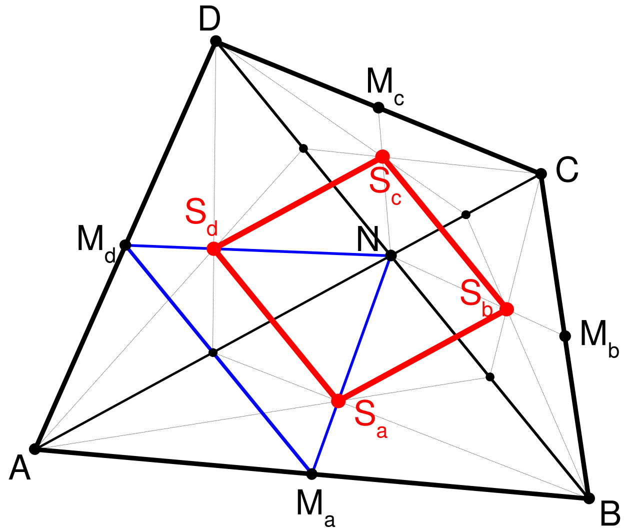

$M_a$ und $M_d$ sind die Mittelpunkte der Seiten AB bzw. AD. Deshalb ist $M_aM_d$ die Mittelparallele im Dreieck ABD. Da N auf der Diagonalen BD liegt, haben A und N von $M_aM_d$ den gleichen Abstand. Insbesondere sind also die jeweiligen Höhen zur Grundseite $M_aM_d$ in den Dreiecken $AM_aM_d$ und $NM_dM_a$ gleich lang.




Daraus folgt für die Flächeninhalte:

$$F_{AM_aM_d} = F_{NM_dM_a} = \frac{1}{2} \cdot F_{AM_aNM_d} \quad (*).$$

$S_a$ und $S_d$ sind die Schwerpunkte der Dreiecke ABN bzw. AND.
Es ist bekannt: Die Schwerpunkte teilen die Seitenhalbierenden im Verhältnis 1 : 2 (diese aus dem Unterricht bekannte Tatsache wird der Vollständigkeit halber in der untenstehenden Nachbemerkung bewiesen).




Das bedeutet: $\overline{NS_a} = \frac{2}{3} \cdot \overline{NM_a}$ und

$\overline{NS_d} = \frac{2}{3} \cdot \overline{NM_d}$.

Nach der Umkehrung des Strahlensatzes ist demnach $S_aS_d$ parallel zu $M_aM_d$.

Somit ist nach dem Strahlensatz $\overline{S_aS_d} = \frac{2}{3} \cdot \overline{M_aM_d}$. Das Dreieck $S_aNS_d$ entsteht also aus dem Dreieck $M_aNM_d$ durch eine zentrische Streckung mit dem Streckfaktor $k = \frac{2}{3}$.

Folglich $F_{S_aNS_d} = \left(\frac{2}{3}\right)^2 \cdot F_{M_aNM_d}$.

Mit (*) erhält man damit: $F_{S_aNS_d} = \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^2 \cdot F_{AM_aNM_d} = \frac{2}{9} \cdot F_{AM_aNM_d}$.

Analog ergibt sich für die drei anderen Teilvierecke des Ausgangsvierecks:

$F_{S_bNS_a} = \frac{2}{9} \cdot F_{BM_bNM_A}$, $F_{S_cNS_b} = \frac{2}{9} \cdot F_{CM_cNM_b}$ und $F_{S_dNS_c} = \frac{2}{9} \cdot F_{DM_dNM_c}$.

Da $F_{S_aS_bS_cS_d} = F_{S_aNS_d} + F_{S_bNS_a} + F_{S_cNS_b} + F_{S_dNS_c}$ und

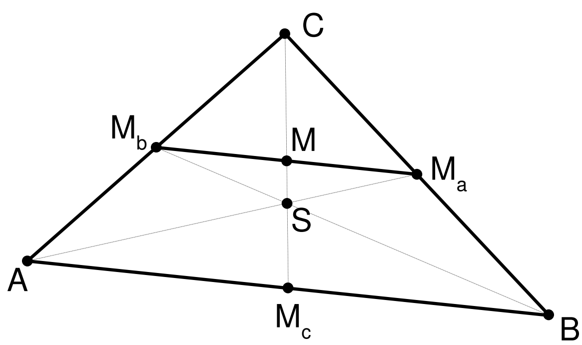
$F_{ABCD} = F_{AM_aNM_d} + F_{BM_bNM_a} + F_{CM_cNM_b} + F_{DM_dNM_c}$ folgt: $F_{S_aS_bS_cS_d} : F_{ABCD} = 2:9$. Dies war zu zeigen.

## Nachbemerkung:

Die Tatsache, dass der Schwerpunkt in einem Dreieck eine Seitenhalbierende im Verhältnis 1 : 2 teilt, kann man einer Formelsammlung entnehmen oder wie folgt beweisen.

Es gilt:

- Der Schwerpunkt S ist der Schnittpunkt der Seitenhalbierenden $AM_a$ und $BM_b$;
- $M_aM_b$ ist Mittelparallele zu AB, d.h. AB ist parallel zu $M_aM_b$ und $\overline{M_aM_b} = \frac{1}{2} \cdot \overline{AB}$;
- Der Mittelpunkt M von $M_aM_b$ ist auch der Mittelpunkt von $M_cC$.




Nach dem Strahlensatz mit Zentrum S folgt $\overline{M_cS} : \overline{SM} = \overline{AB} : \overline{M_aM_b} = 2:1$, also

$\overline{M_cS} = \frac{2}{3} \cdot \overline{M_cM}$. Somit $\overline{M_cS} = \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2} \cdot \overline{CM_c} = \frac{1}{3} \cdot \overline{CM_c}$, bzw. $\overline{M_cS} : \overline{SC} = 1:2$.

## Aufgabe 6

*Zeige: Bildet man von fünf verschiedenen natürlichen Zahlen alle möglichen positiven Differenzen je zweier dieser Zahlen, so ist das Produkt aller Differenzen durch 288 teilbar.*

### Vorbemerkung:

Angenommen zwei Zahlen a und b lassen bei der Division durch 4 den gleichen Rest. Dann ist die Differenz a – b durch 4 teilbar.
Genauso ist a – b durch 3 teilbar, wenn a und b bei Division durch 3 den gleichen Rest lassen.

### Beweis der Vorbemerkung:

Angenommen a und b lassen bei der Division durch 4 den Rest r (als Rest ist hier 0, 1, 2 oder 3 möglich). Dann ist $a = 4\cdot m+r$ und $b = 4\cdot n+r$. Somit ist

$$a - b = (4m+r) - (4n+r) = 4\cdot(m-n).$$

Also ist a – b durch 4 teilbar. Analog ist der Beweis für 3.

### 1. Beweisvorschlag:

Es ist $288 = 2^5\cdot 3^2 = 32\cdot 9$. Da 32 und 9 teilerfremd sind, genügt es zu zeigen, dass das Produkt der positiven Differenzen der fünf Zahlen durch 32 und durch 9 teilbar ist.

**Schritt 1: *Das Produkt ist durch 32 teilbar.***

**Fall 1:** *Vier der fünf gegebenen Zahlen sind ungerade.*
Diese vier ungeraden Zahlen seien a,b,c,d mit $a<b<c<d$. Da die Differenz zwischen zwei ungeraden Zahlen gerade ist, sind alle Differenzen zwischen diesen vier ungeraden Zahlen gerade. Die positiven Differenzen sind die folgenden sechs Differenzen:

$$d-a,\ d-b,\ d-c,\ c-a,\ c-b,\ b-a.$$

Da sie alle gerade sind ist ihr Produkt sogar durch $2^6 = 64$ teilbar und damit auch das Produkt aller positiven Differenzen der fünf Zahlen.

**Fall 2:** *Vier der fünf gegebenen Zahlen sind gerade.*
Auch in diesem Fall ist das Produkt der Differenzen analog zu Fall 1 durch $2^6 = 64$ teilbar, da auch die Differenz zwischen zwei geraden Zahlen gerade ist.

**Fall 3:** *Drei der fünf gegebenen Zahlen sind ungerade, die beiden anderen Zahlen sind gerade.*
Die drei ungeraden Zahlen seien a,b,c mit $a<b<c$. Die beiden geraden Zahlen seien d und e mit $d<e$. Die positiven Differenzen c–b, c–a, b–a sowie e–d sind wie in Fall 1 alle gerade.
Da a, b und c ungerade sind, lassen sie bei der Division durch 4 entweder den Rest 1 oder den Rest 3. Da es also für a,b,c nur zwei mögliche Reste gibt, kommt ein Rest dop-

pelt vor, d.h. zwei der drei Zahlen lassen beim Teilen durch 4 denselben Rest. Die Differenz dieser beiden Zahlen ist dann nach Vorbemerkung durch 4 teilbar.
Die vier Differenzen c–b, c–a, b–a, e–d sind also alle gerade, zusätzlich ist mindestens eine der Differenzen durch 4 teilbar. Somit ist das Produkt (c–b)·(c–a)·(b–a)·(e–d) durch 4·2·2·2 = 32 teilbar.

**Fall 4:** *Drei der fünf gegebenen Zahlen sind gerade, die beiden anderen Zahlen sind ungerade.*
Auch in diesem Fall ist das Produkt der Differenzen analog zu Fall 3 durch 32 teilbar, die Rolle der geraden und ungeraden Zahlen wird nur vertauscht, was für die Differenzen keine Rolle spielt.

Sind unter den fünf gegebenen Zahlen weniger als drei ungerade Zahlen, so sind mindestens drei der fünf Zahlen gerade. Es gibt also entweder drei gerade oder drei ungerade Zahlen. Somit sind alle möglichen Fälle abgedeckt und wir haben bewiesen, dass das Produkt immer durch 32 teilbar ist.

**Schritt 2:** ***Das Produkt ist durch 9 teilbar.***

Als Reste bei der Division einer Zahl durch 3 sind 0, 1 oder 2 möglich. Bei fünf gegebenen Zahlen gibt es also für die Reste bei ihrer Division durch 3 zwei Möglichkeiten: Entweder haben mindestens drei der fünf Zahlen bei Division durch 3 denselben Rest. Oder bei Division durch 3 kommen zwei Reste doppelt vor, der dritte Rest kommt noch einmal vor.

**Fall 1:** *Bei Division der fünf gegebenen Zahlen durch 3 kommt ein Rest mindestens drei Mal vor.*
Seien a,b,c drei der gegebenen Zahlen (a<b<c), die bei Division durch 3 denselben Rest lassen. Dann sind nach Vorbemerkung alle Differenzen dieser drei Zahlen durch 3 teilbar. Somit ist das Produkt (c–b)·(c–a)·(b–a) sogar durch 3·3·3=27 teilbar.

**Fall 2:** *Bei Division der fünf gegebenen Zahlen durch 3 kommen zwei Reste doppelt vor, der dritte Rest kommt einmal vor.*
Die Zahlen a und b (a<b) lassen bei Division durch 3 denselben Rest, ebenso die Zahlen c und d (c<d). Dann sind nach Vorbemerkung die Differenzen b–a und d–c durch 3 teilbar. Somit ist das Produkt (b–a)·(d–c) durch 3·3=9 teilbar.

In jedem Fall ist das Produkt der positiven Differenzen der fünf gegebenen Zahlen also durch 9 teilbar.

## *2. Beweisvorschlag:*

Ohne Einschränkung sind die fünf Zahlen mit $a_1$, $a_2$, $a_3$, $a_4$ und $a_5$ bezeichnet und der Größe nach geordnet: $a_1 < a_2 < a_3 < a_4 < a_5$.

Als positive Differenzen ergeben sich die folgenden 10 Zahlen:
$a_5–a_1$, $a_5–a_2$, $a_5–a_3$, $a_5–a_4$, $a_4–a_1$, $a_4–a_2$, $a_4–a_3$, $a_3–a_1$, $a_3–a_2$, $a_2–a_1$.
Es soll nun gezeigt werden, dass ihr Produkt durch $288 = 2^5 \cdot 3^2$ teilbar ist.

**Behauptung 1:** Zwei der 10 Differenzen sind durch 3 teilbar.

Bei der Division durch 3 gibt es drei verschiedene Reste: 0, 1 und 2.

**1. Fall:** Drei der fünf Zahlen haben den gleichen Rest.
Diese drei Zahlen seien $a_i$, $a_j$ und $a_k$ mit $i < j < k$. Somit sind nach Vorbemerkung $a_k–a_j$, $a_k–a_i$ und $a_j–a_i$ durch 3 teilbar.

**2. Fall:** Keine drei Zahlen haben den gleichen Rest. Also haben maximal zwei Zahlen den gleichen Rest.
Da es 5 Zahlen gibt, die auf 3 Reste verteilt werden müssen, gibt es zwei Paare von Zahlen (etwa $a_i$, $a_j$ und $a_k$, $a_l$ mit $i < j$ und $k < l$) mit jeweils gleichem Rest.
Somit sind nach Vorbemerkung $a_j–a_i$ und $a_l–a_k$ beide durch 3 teilbar.

Also sind mindestens zwei Differenzen durch 3 teilbar und Behauptung 1 ist bewiesen.

**Behauptung 2:** Eine der 10 Differenzen ist durch 4 teilbar.

Bei der Division durch 4 gibt es vier verschiedene Reste: 0, 1, 2 und 3.
Da es 5 Zahlen gibt, die auf diese 4 Reste verteilt werden müssen, gibt es ein Paar von Zahlen (etwa $a_i$, $a_j$ mit $i <j$) mit gleichem Rest. Somit ist nach Vorbemerkung $a_j–a_i$ durch 4 teilbar.

**Behauptung 3:** Mindestens vier der 10 Differenzen sind durch 2 teilbar.

Bei der Division durch 2 gibt es zwei verschiedene Reste: 0 und 1.

**1. Fall:** Vier Zahlen der fünf Zahlen haben den gleichen Rest.
Diese vier Zahlen seien $a_i$, $a_j$, $a_k$, und $a_l$ mit $i <j<k<l$. Somit sind $a_l–a_k$, $a_l–a_j$, $a_l–a_i$, $a_k–a_i$, $a_k–a_j$ und $a_j–a_i$ durch 2 teilbar.

**2. Fall:** Keine vier Zahlen haben den gleichen Rest.
Da es 5 Zahlen gibt, die auf 2 Reste verteilt werden müssen, gibt es drei Zahlen (etwa $a_{i,}$ $a_j$, $a_k$ mit $i <j<k$) mit gleichem Rest. Aber auch die beiden anderen Zahlen ($a_l$, $a_m$ mit $l <m$) haben einen gemeinsamen Rest.
Somit sind $a_k–a_j$, $a_k–a_i$ und $a_i–a_j$, aber auch $a_m–a_l$ durch 2 teilbar.
Also sind in jedem Fall mindestens vier Differenzen durch 2 teilbar.
Aus Behauptung 1und 3 folgt sofort, dass das Produkt der 10 Differenzen durch $2^4 \cdot 3^2$ teilbar ist. Berücksichtigt man, dass eine Differenz nach Behauptung 2 durch 4 teilbar ist, ist das Produkt noch durch einen weiteren Faktor 2 teilbar.

Somit ist das Produkt der 10 Differenzen durch $2^4 \cdot 3^2 \cdot 2 = 288$ teilbar.