Landeswettbewerb Mathematik
Baden-Württemberg
Musterlösungen 1. Runde 2012/2013

Aufgabe 1

An der Tafel stehen die Zahlen 20 und 12. Paul will eine weitere natürliche Zahl hinzufügen, so dass jede dieser drei Zahlen das Produkt der beiden anderen ohne Rest teilt. Bestimme die kleinste Zahl, die Paul an die Tafel schreiben kann.

Lösung:
Die gesuchte Zahl ist 15.

1. Beweisvorschlag (Systematisches Probieren):

Nach Aufgabenstellung muss die gesuchte Zahl n die folgenden drei Bedingungen erfüllen:

1) n muss das Produkt $12 \cdot 20 = 240$ ohne Rest teilen (kurz: $n|(20 \cdot 12)$).
2) 12 muss das Produkt $20 \cdot n$ ohne Rest teilen (kurz: $12|(20 \cdot n)$).
3) 20 muss das Produkt $12 \cdot n$ ohne Rest teilen (kurz: $20|(12 \cdot n)$).

In der folgenden Tabelle wird für die kleinsten natürlichen Zahlen n getestet, ob diese drei Bedingungen erfüllt sind. Dabei steht „x“ für „ja“ und „-“ für „nein“.

Zahl n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
$n\|(20 \cdot 12)$?	x	x	x	x	x	x	-	x	-	x	-	x	-	-	x
$12\|(20 \cdot n)$?	-	-	x	-	-	x	-	-	x	-	-	x	-	-	x
$20\|(12 \cdot n)$?	-	-	-	-	x	-	-	-	-	x	-	-	-	-	x

Die kleinste Zahl n, die alle Bedingungen erfüllt, ist n = 15. Also ist n die gesuchte Zahl.

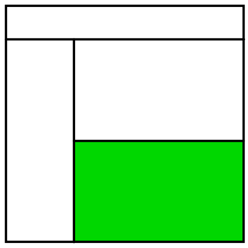
2. Beweisvorschlag (mit Teilbarkeit):

Wenn eine natürliche Zahl n die Bedingung der Aufgabe erfüllt, dann muss $20 \cdot n$ ohne Rest durch 12 teilbar sein. Da 12 durch 3 teilbar ist, muss $20 \cdot n$ auch durch 3 teilbar sein. Da 20 nicht durch die Primzahl 3 teilbar ist, kann $20 \cdot n$ nur dann durch 3 teilbar sein, wenn n durch 3 teilbar ist. Also muss n durch 3 teilbar sein.

Ebenso muss für eine Zahl n, die die Bedingung der Aufgabe erfüllt, auch $12 \cdot n$ durch 20 teilbar sein. Da 20 durch 5 teilbar ist, muss $12 \cdot n$ auch durch 5 ohne Rest teilbar sein. Weil aber 12 nicht durch 5 teilbar ist, muss dann n durch 5 teilbar sein.

Somit muss n durch 3 und durch 5 teilbar sein. Die kleinste natürliche Zahl n, die sowohl durch 3 als auch durch 5 teilbar ist, ist n = 15.
Tatsächlich sind für n = 15 alle Bedingungen der Aufgabe erfüllt: 15 teilt $12 \cdot 20 = 240$, 20 teilt $12 \cdot 15 = 180$ und 12 teilt $15 \cdot 20 = 300$.

Aufgabe 2

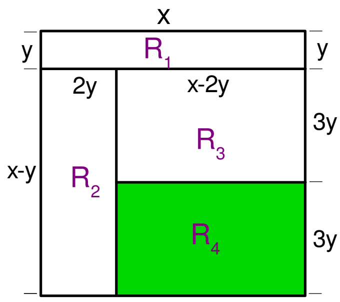


Im abgebildeten Quadrat haben die vier Rechtecke den gleichen Umfang.
Wie groß ist der Anteil der Fläche des markierten Rechtecks an der Fläche des Quadrats?

Lösung:

Der Anteil der markierten Fläche an der gesamten Quadratfläche beträgt $\frac{15}{49}$.

1. Beweisvorschlag (vom Quadrat ausgehend):



Die Rechtecke bezeichnen wir wie in der Abbildung rechts mit R_1 bis R_4. Dabei ist x die Seitenlänge des Quadrates. x und y sind die Seitenlängen von R_1. Der Umfang U_1 von R_1 ist demnach
$U_1 = 2 \cdot x + 2 \cdot y$.

R_2 hat aufgrund der Zerlegung eine Seite der Länge $x - y$. Damit der Umfang von R_2 gleich groß wie der Umfang von R_1 ist, muss für die andere Seitenlänge s von R_2 dann gelten:

$$2 \cdot (x - y) + 2 \cdot s = 2 \cdot x + 2 \cdot y \text{ oder } (x - y) + s = x + y.$$

Daraus ergibt sich $s = x + y - (x - y) = 2y$.

Aufgrund der Zerlegung hat R_3 dann eine Seite der Länge $x - 2y$ (s. Zeichnung). Damit der Umfang von R_3 gleich dem von R_1 ist, muss für die zweite Seitenlänge t von R_3 dann gelten:

$$2 \cdot (x - 2y) + 2 \cdot t = 2 \cdot x + 2 \cdot y \text{ oder } (x - 2y) + t = x + y.$$

Daraus ergibt sich $t = x + y - (x - 2y) = 3y$.

Weil R_4 eine Seitenlänge mit R_3 gemeinsam hat und beide Rechtecke gleichen Umfang haben, müssen beide Seitenlängen der beiden Rechtecke übereinstimmen, das heißt auch R_4 hat die Seitenlängen $x - 2y$ und $3y$.

Die Seitenlänge 3y von R_4 und R_3 und die Seitenlänge y von R_1 ergeben aber zusammen eine ganz Quadratseite der Länge x (s. Zeichnung). Damit ergibt sich x:

$$x = y + 3y + 3y = 7y.$$

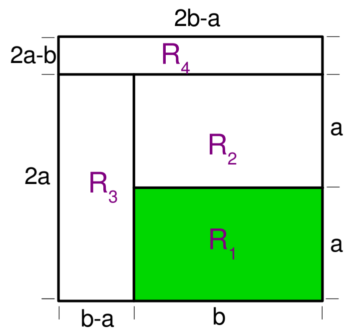
Also hat das markierte Rechteck R_4 den Flächeninhalt
$(x - 2y) \cdot 3y = (7y - 2y) \cdot 3y = 5y \cdot 3y = 15y^2$.

Das gesamte Quadrat hat den Flächeninhalt $x^2 = (7y)^2 = 49y^2$.

Der Anteil der Fläche von R_4 am Ausgangsquadrat beträgt also $\frac{15y^2}{49y^2} = \frac{15}{49}$.

2. Beweisvorschlag (vom Rechteck ausgehend):

Die Rechtecke bezeichnen wir diesmal wie in der Abbildung rechts mit R_1 bis R_4. Dabei sind a und b die Seitenlängen von R_1, wobei b die längere der beiden Seiten bezeichnet. Der Umfang von R_1 ist demnach $2a + 2b$.



R_2 hat aufgrund der Zerlegung eine Seite der Länge b mit R_1 gemeinsam. Da R_1 und R_2 denselben Umfang haben, muss die andere Seitenlänge von R_2 auch die Länge a haben.

Aufgrund der Zerlegung hat R_3 dann eine Seite der Länge 2a. Damit der Umfang von R_3 gleich groß wie der von R_1 ist, muss für die zweite Seitenlänge x von R_3 dann gelten:

$$2x + 2 \cdot (2a) = 2a + 2b \text{ oder } x = b - a.$$

Aufgrund der Zerlegung hat R_4 dann eine Seite der Länge $b + (b - a) = 2b - a$. Dies ist auch die Seitenlänge des Ausgangsquadrats. Weil der Umfang von R_4 gleich dem von R_1 sein soll, gilt für die zweite Seitenlänge y von R_4 demnach

$$2y + 2(2b - a) = 2a + 2b \text{ oder } y = 2a - b.$$

Die Seitenlänge des Ausgangsquadrates ist somit zum einen gleich $2b - a$, zum anderen aber auch gleich $(2a - b) + 2a = 4a - b$. Es folgt $2b - a = 4a - b$ oder $3b = 5a$. Es folgt $b = \frac{5}{3}a$.

Also hat das markierte Rechteck R_4 den Flächeninhalt $a \cdot b = \frac{5}{3}a^2$

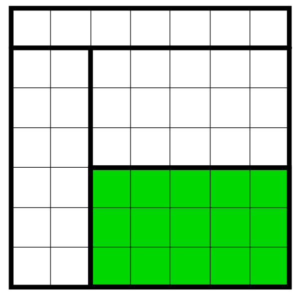
Das Ausgangsquadrat hat den Flächeninhalt

$$(2b - a)^2 = (2 \cdot \frac{5}{3}a - a)^2 = (\frac{10}{3}a - a)^2 = (\frac{7}{3}a)^2 = \frac{49}{9}a^2.$$

Der Anteil der Fläche von R_4 am Ausgangsquadrat beträgt also $\frac{\frac{5}{3}a^2}{\frac{49}{9}a^2} = \frac{5}{3} \cdot \frac{9}{49} = \frac{15}{49}$.

3. Beweisvorschlag (mit Zerlegung):

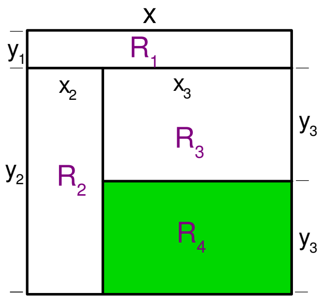
Das gegebene Quadrat kann durch zu seinen Seiten parallele Strecken in 49 Einheitsquadrate zerlegt werden (s. Abb.). Anschließend kann man das Quadrat wie in der Abbildung entlang der erhaltenen Gitterlinien in vier Rechtecke zerlegen. Jedes der Rechtecke hat dabei den Umfang von 16 Längeneinheiten. Es handelt sich also um eine Zerlegung, die alle Bedingungen der Aufgabe erfüllt. Der Flächenanteil des markierten Rechtecks an der gesamten Quadratfläche ist dabei



$$\frac{15 \text{ kleine Quadrate}}{49 \text{ kleine Quadrate}} = \frac{15}{49}.$$

Es muss nun noch begründet werden, dass die so gewonnene Zerlegung des Quadrates die einzige ist, bei der die vier Rechtecke denselben Umfang haben.

Angenommen die Seitenlänge y_1 des Rechtecks R_1 (siehe Abbildung) wäre größer als in obiger Zerlegung, das heißt größer als $\frac{1}{7}$ der Seitenlänge x des Ausgangsquadrats. Dann wären notwendigerweise die Seitenlängen y_2 und y_3 von R_2, R_3 und R_4 kleiner als in obiger Zerlegung, das heißt $y_2 < \frac{6}{7}x$ und $y_3 = \frac{1}{2}y_2 < \frac{3}{7}x$.



Wegen der Umfangsgleichheit der vier Rechtecke müssten dann aber die Seitenlängen x_2 und x_3 von R_2, R_3 und R_4 größer sein als in der oben konstruierten Zerlegung, also $x_2 < \frac{2}{7}x$ und $x_3 < \frac{5}{7}x$. Das kann aber nicht sein, denn $x_2 + x_3 = x$.

Analog führt man die Annahme $y_1 < \frac{1}{7}x$ zum Widerspruch.

Also muss y_1 genau so groß sein, wie in der Zerlegung, also $y_1 = \frac{1}{7}x$.

Daraus folgt aber $y_2 = x - y_1 = \frac{6}{7}x$ und $y_3 = \frac{1}{2}y_2 = \frac{3}{7}x$.

Wegen der Umfangsgleichheit der Rechtecke ergibt sich $x_2 + y_2 = x + y_1$ und $x_3 + y_3 = x + y_1$.

Somit $x_2 = x + y_1 - y_2 = x + \frac{1}{7}x - \frac{6}{7}x = \frac{2}{7}x$ und $x_3 = x + y_1 - y_3 = x + \frac{1}{7}x - \frac{3}{7}x = \frac{5}{7}x$.

Somit haben alle Rechtecke genau die in der Zerlegung konstruierten Seitenlängen, was zu zeigen war.

Aufgabe 3

Bestimme die größte Zahl, die kleiner als 1 ist und sich als Summe von drei Stammbrüchen darstellen lässt.

Hinweis: Ein Stammbruch ist ein Bruch mit Zähler 1 und einer natürlichen Zahl als Nenner.

Lösung:

Die größte solche Zahl ist $\frac{41}{42}$.

Beweisvorschlag:

Wegen $\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{7}=\frac{41}{42}$ ist $\frac{41}{42}$ tatsächlich eine Summe aus drei Stammbrüchen und ist auch kleiner als 1.

Wir müssen noch nachweisen, dass $\frac{41}{42}$ die größte Summe aus drei Stammbrüchen ist, die kleiner als 1 ist. Da keiner der drei Stammbrüche $\frac{1}{1}$ sein kann (sonst wäre ihre Summe > 1), ist $\frac{1}{2}$ der größte Stammbruch, der vorkommen kann.

Behauptung 1: Wenn die Summe von drei Stammbrüchen maximal < 1 ist, so muss $\frac{1}{2}$ unter den drei Stammbrüchen genau einmal vorkommen.

Beweis der Behauptung 1:

Die größte Summe von drei Stammbrüchen, von denen keiner $\frac{1}{2}$ ist, ist $\frac{1}{3}+\frac{1}{3}+\frac{1}{3}$. Dies ist aber unmöglich, da $\frac{1}{3}+\frac{1}{3}+\frac{1}{3}=1$. Die nächstkleinere Summe ist $\frac{1}{3}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}=\frac{11}{12}$. Nun ist aber $\frac{11}{12}=\frac{77}{84}$ und $\frac{41}{42}=\frac{82}{84}$, somit $\frac{11}{12}<\frac{41}{42}$. Somit muss $\frac{1}{2}$ unter den drei Brüchen vorkommen. $\frac{1}{2}$ kann aber nicht doppelt vorkommen, denn $\frac{1}{2}+\frac{1}{2}$ ist bereits 1. Also kommt $\frac{1}{2}$ unter den drei Stammbrüchen genau einmal vor.

Behauptung 2: Außer $\frac{1}{2}$ muss auch $\frac{1}{3}$ unter den drei Stammbrüchen vorkommen

Beweis der Behauptung 2:

Die größte Summe von drei Stammbrüchen, von denen genau einer $\frac{1}{2}$ ist und von denen keiner $\frac{1}{3}$ ist, ist $\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{4}=1$. Dies ist nicht erlaubt. Die nächstkleinere Summe ist

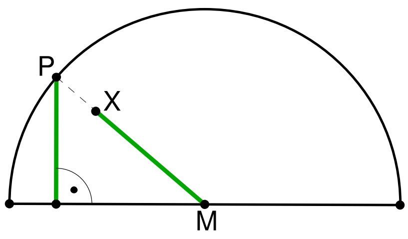
$\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}=\frac{19}{20}$. Nun ist aber $\frac{19}{20}=\frac{399}{420}<\frac{41}{42}=\frac{410}{420}$. Somit muss außer $\frac{1}{2}$ auch $\frac{1}{3}$ unter den drei Stammbrüchen vorkommen. Somit ist Behauptung 2 bewiesen.

Die größte Summe von drei Stammbrüchen, von denen einer $\frac{1}{2}$ und ein zweiter $\frac{1}{3}$ ist, ist $\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{7}=\frac{41}{42}$. Das war zu zeigen.

Bemerkung:
Man könnte denken, dass man diese Argumentation wesentlich abkürzen kann:
Man wählt zunächst den größten Stammbruch kleiner 1, also $\frac{1}{2}$. Dann wählt man den größten Stammbruch $\frac{1}{n}$, so dass $\frac{1}{2}+\frac{1}{n}<1$. Es ist klar, dass dieser Stammbruch $\frac{1}{3}$ ist. Schließlich wählt man den größten Stammbruch $\frac{1}{m}$ mit $\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{m}<1$. Dies ist $\frac{1}{7}$ und man wäre fertig.
Dieser „Beweis“ ist aber falsch, obwohl er in diesem Fall zur richtigen Lösung geführt hat. Wie kann man sicher sein, dass am Schluss die Summe maximal ist, nur weil man mit einem möglichst großen Stammbruch gestartet ist? Vielleicht hätte man mit einem kleineren Stammbruch als $\frac{1}{3}$ als zweiten Stammbruch später dann einen größeren dritten Stammbruch wählen können, so dass die Gesamtsumme größer geworden wäre?
Das folgende Beispiel zeigt, dass diese „Argumentation“ tatsächlich zu einer falschen Lösung führen kann:
Angenommen die Aufgabe hätte gelautet: *Bestimme die größte Zahl, die kleiner als $\frac{23}{24}$ ist und sich als Summe von drei Stammbrüchen darstellen lässt.*
Nach der eben gerade beschriebenen Methode würde man zunächst $\frac{1}{2}$ wählen, da $\frac{1}{2}$ der größte Stammbruch kleiner $\frac{23}{24}$ ist. Dann wählt man den größten Stammbruch $\frac{1}{n}$, so dass $\frac{1}{2}+\frac{1}{n}<\frac{23}{24}$. Es ist klar, dass dieser Stammbruch $\frac{1}{3}$ ist. Schließlich wählt man den größten Stammbruch $\frac{1}{m}$ mit $\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{m}<\frac{23}{24}$. Es ergibt sich $\frac{1}{m}=\frac{1}{9}$. Man würde als Lösung der Aufgabe also $\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{9}=\frac{17}{18}$ erhalten.
Folgt man aber dem korrekten Beweisvorschlag der Aufgabe, so findet man die Lösung $\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}=\frac{19}{20}$. Sie ist größer als $\frac{17}{18}$. Zwar ist der Stammbruch $\frac{1}{4}$ kleiner als $\frac{1}{3}$ (zweiter Stammbruch), aber mit $\frac{1}{4}$ ist als dritter Stammbruch $\frac{1}{5}$ möglich, was wesentlich größer als $\frac{1}{9}$ ist.

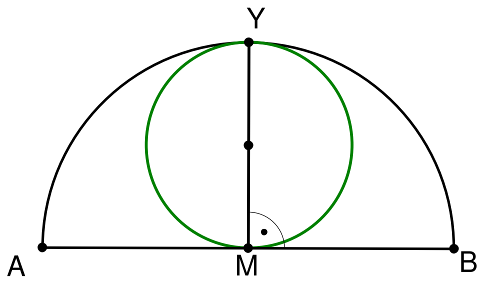
Aufgabe 4

Der Punkt P liegt auf einem Halbkreis mit Mittelpunkt M. Der Punkt X auf dem Radius MP hat von M den gleichen Abstand wie P vom Durchmesser des Halbkreises. Auf welcher Kurve bewegt sich X, wenn P den Halbkreis durchläuft?



Lösung:

Wir bezeichnen die Endpunkte des gegebenen Durchmessers mit A und B. Im Mittelpunkt M zeichnen wir die Orthogonale zu AB ein, der Schnittpunkt der Orthogonalen mit dem Halbkreis sei der Punkt Y (s. Zeichnung).
Dann bewegt sich X auf dem Kreis mit Durchmesser MY.



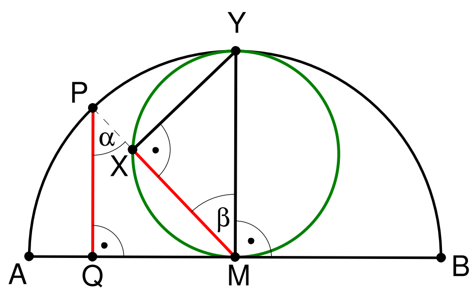
Vorbemerkung:

In den Spezialfällen P = A, P = Y und P = B ergeben sich für X die Punkte X = M, X = Y und X = M (in dieser Reihenfolge). Hier liegt X also tatsächlich auf dem genannten Kreis. Im Folgenden sehen wir von diesen Spezialfällen ab, so dass alle genannten Dreiecke und Winkel auch wirklich existieren.

1. Beweisvorschlag (mit Kongruenzsätzen):

Sei Q der Lotfußpunkt von P auf AB. Die beiden Dreiecke PQM und MYX sind kongruent nach Kongruenzsatz SWS:

- PQ = MX nach Voraussetzung;
- PM = MY, da beide Strecken Radien im Halbkreis sind und
- $\alpha = \beta$ als Wechselwinkel an den Parallelen PQ und MY (PQ und MY stehen beide senkrecht auf AB).

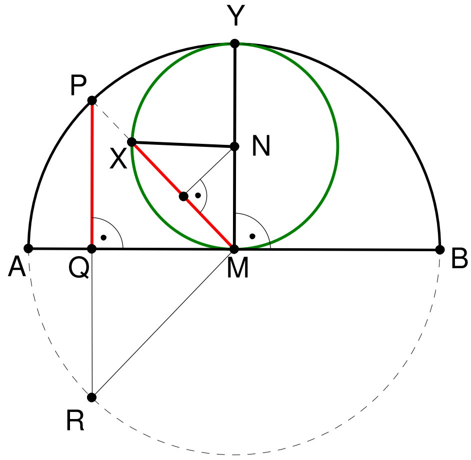


Aus der Kongruenz ergibt sich, dass die Winkel $\sphericalangle MXY$ und $\sphericalangle MQP$ gleich weit sein müssen. Da $\sphericalangle MQP = 90°$, folgt auch $\sphericalangle MXY = 90°$.
Nach der Umkehrung des Satzes des Thales liegt X damit auf dem Kreis mit Durchmesser MY. Dies war zu zeigen.

Bemerkung:

Tatsächlich kommt auch jeder Punkt des Kreises mit Durchmesser MY als Punkt X vor. Um dies einzusehen, muss man zu gegebenem X auf dem Kreis einen Punkt P finden, der entsprechend der Konstruktion in der Aufgabe zu dem Punkt X führt. Dies gelingt aber einfach, indem man den Strahl MX (falls $M \neq X$) mit dem Halbkreis schneidet und diesen Schnittpunkt P nennt. Nach dem Satz des Thales ist dann (siehe Bild oben) das Dreieck MXY rechtwinklig und kongruent zum Dreieck PQM. Somit folgt $\overline{PQ} = \overline{MX}$. Im Falle X = M wählt man zum Beispiel P = A.

2. Beweisvorschlag (mit ähnlichen Dreiecken):



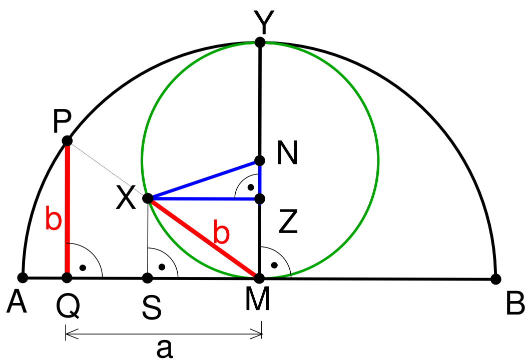
Die Mittelsenkrechte der Strecke MX schneidet den Radius MY im Punkt N. Außerdem sei R der Spiegelpunkt von P bei Spiegelung an AB. Dann sind MP und MR aufgrund der Spiegelsymmetrie gleich lang, also ist PRM gleichschenklig. Da N auf der Mittelsenkrechten von XM liegt, gilt $\overline{MN} = \overline{XN}$. Also ist auch das Dreieck XMN die Dreiecke gleichschenklig. Beide Dreiecke haben außerdem gleiche Basiswinkel: Es gilt $\sphericalangle RPM = \sphericalangle NMX$, da diese Winkel Wechselwinkel an den Parallelen PR und YM sind.
Daher sind die beiden Dreiecke PRM und XMN sogar ähnlich.

Wegen $\overline{XM} = \overline{PQ} = \frac{1}{2} \cdot \overline{PR}$ ist der Streckfaktor dabei $\frac{1}{2}$.

Also gilt, unabhängig von der Lage von P, $\overline{MN} = \frac{1}{2} \cdot \overline{RM} = \frac{1}{2} \cdot \overline{MY}$.

Daher ist N der Mittelpunkt der Strecke MY. Wegen $\overline{MN} = \overline{XN}$ liegt X auf dem Kreis um N vom Radius $\overline{NM}$.

3. Beweisvorschlag (rechnerischer Beweis):



Wir bezeichnen die Punkte wie in der nebenstehenden Abbildung: Q bzw. S seien die Schnittpunkte der Lote von P bzw. X auf den Durchmesser AB, Z sei der Schnittpunkt des Lots von X auf den Radius MY und N der Mittelpunkt von MY.
Außerdem sei r der Radius des Halbkreises, $a = \overline{QM}$ und $b = \overline{PQ} = \overline{XM}$. Dann gilt nach dem Satz des Pythagoras $a^2 + b^2 = r^2$.
Das Dreieck PQM geht durch eine zentrische Streckung mit Zentrum M aus dem Dreieck XSM hervor, der Streckfaktor ist $\frac{\overline{PM}}{\overline{XM}} = \frac{r}{b}$. Somit $\frac{\overline{QM}}{\overline{SM}} = \frac{a}{\overline{XZ}} = \frac{r}{b}$, also $\overline{XZ} = \frac{b}{r} \cdot a$. Außerdem ist $\frac{\overline{PQ}}{\overline{XS}} = \frac{b}{\overline{ZM}} = \frac{r}{b}$, also $\overline{ZM} = \frac{b^2}{r}$. Folglich $\overline{NZ} = \frac{r}{2} - \overline{MZ} = \frac{r}{2} - \frac{b^2}{r}$.
Der Satz des Pythagoras für das Dreieck XZN ergibt nun

$$\overline{XN} = \sqrt{\overline{XZ}^2 + \overline{NZ}^2} = \sqrt{\frac{b^2 \cdot a^2}{r^2} + \left(\frac{r}{2} - \frac{b^2}{r}\right)^2} = \sqrt{\frac{b^2 \cdot a^2}{r^2} + \frac{r^2}{4} - b^2 + \frac{b^4}{r^2}}$$

$$= \sqrt{\frac{b^2}{r^2} \cdot \left(a^2 + b^2\right) + \frac{r^2}{4} - b^2} = \sqrt{\frac{b^2}{r^2} \cdot r^2 - b^2 + \left(\frac{r}{2}\right)^2} = \frac{r}{2}.$$

Somit liegt X auf dem Kreis vom Radius $\frac{r}{2}$ um N – das war zu zeigen.

Aufgabe 5

Petra legt 25 Karten auf den Tisch, die mit den Zahlen 1, 2, 3, ..., 25 beschriftet sind. Wie viele Karten kann sie höchstens auswählen, so dass auf diesen Karten keine zwei Zahlen stehen, deren Produkt eine Quadratzahl ist?

Lösung:

Petra kann höchstens 16 Karten auswählen.

1. Beweisvorschlag:

Petra kann zum Beispiel die 16 Karten mit den Zahlen 1, 2, 3, 5, 6 = 2·3, 7, 10 = 2·5, 11, 13, 14 = 2·7, 15 = 3·5, 17, 19, 21 = 3·7, 22 = 2·11 und 23 wählen.
Jede dieser Zahlen (außer 1) ist entweder Primzahl oder Produkt von zwei verschiedenen Primzahlen. Zu zwei verschiedenen Zahlen gibt es aber immer einen Primfaktor, der nur in einer der beiden Zahlen vorkommt, im Produkt der beiden Zahlen also nicht doppelt. Somit kann das Produkt von je zwei dieser Zahlen keine Quadratzahl sein.
Wir müssen nun noch nachweisen, dass Petra nicht mehr als 16 Zahlen auswählen kann.
Hierzu zerlegen wir die Karten entsprechend ihrer Nummer auf die folgenden 16 Stapel S_1 bis S_{16}:
$S_1 = \{1;4;9;16;25\}$, $S_2 = \{2;8;18\}$, $S_3 = \{3;12\}$, $S_4 = \{5;20\}$, $S_5 = \{6;24\}$, $S_6 = \{7\}$,
$S_7 = \{10\}$, $S_8 = \{11\}$, $S_9 = \{13\}$, $S_{10} = \{14\}$, $S_{11} = \{15\}$, $S_{12} = \{17\}$, $S_{13} = \{19\}$, $S_{14} = \{21\}$,
$S_{15} = \{22\}$, $S_{16} = \{23\}$.
Dies bedeutet: Stapel S_1 enthält die Karten mit den Zahlen 1,4,9,16 und 25; Stapel S_2 die Karten mit den Zahlen 2, 8 und 18 usw.
In jedem Stapel mit mehr als einer Karte ist das Produkt je zweier Zahlen auf Karten des Stapels eine Quadratzahl. Petra darf also von jedem Stapel bei ihrer Auswahl höchstens eine Karte nehmen, insgesamt also höchstens 16 Stück.

2. Beweisvorschlag:

Wie im 1. Beweisvorschlag zeigt man, dass Petra tatsächlich 16 Zahlen auswählen kann. Um nachzuweisen, dass Petra nicht mehr als 16 Zahlen wählen kann, betrachten wir diejenigen Karten, auf denen die Zahlen stehen, die höchstens die „kleinen" Primfaktoren 2, 3 oder 5 enthalten. Die Menge dieser Zahlen auf den Karten bezeichnen wir mit K.
Es ist $K = \{1;2;3;4;5;6;8;9;10;12;15;16;18;20;24;25\}$.

Jede Zahl aus K hat dann eine Primfaktorzerlegung der Form $2^a 3^b 5^c$ mit nicht negativen ganzen Exponenten a; b; c (hierbei ist auch der Fall $1 = 2^0 3^0 5^0$ eingeschlossen).
Wir betrachten jetzt die Parität dieser Exponenten, also ihre Eigenschaft, gerade oder ungerade zu sein. Das Produkt zweier Zahlen $2^{a_1} 3^{b_1} 5^{c_1}$ und $2^{a_2} 3^{b_2} 5^{c_2}$ aus K ergibt

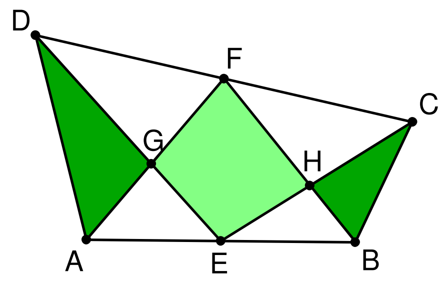
$2^{a_1+a_2}3^{b_1+b_2}5^{c_1+c_2}$. Dies ist genau dann eine Quadratzahl, wenn a_1+a_2, b_1+b_2 und c_1+c_2 gerade Zahlen sind. Das wiederum ist genau dann der Fall, wenn a_1 und a_2, b_1 und b_2 sowie c_1 und c_2 jeweils gleiche Parität haben, also entweder beide gerade oder beide ungerade sind.

Da es für jeden der drei Exponenten in der Primfaktordarstellung einer Zahl aus K genau 2 mögliche Paritäten gibt, gibt es für die Produkte der drei Potenzen insgesamt 2·2·2 = 8 verschiedene Möglichkeiten, nämlich:
(*gerade;gerade;gerade*), (*gerade;gerade;ungerade*), (*gerade;ungerade;gerade*), (*ungerade;gerade;gerade*), (*gerade;ungerade;ungerade*), (*ungerade;gerade;ungerade*), (*ungerade;ungerade;gerade*) und (*ungerade;ungerade;ungerade*).
Eine Zahl $2^a3^b5^c$ gehört dabei z.B. zur Möglichkeit (*gerade;ungerade;ungerade*), wenn a gerade, b ungerade und c ungerade ist. Der erste Eintrag in einem solchen Tripel gibt also die Parität des Exponenten von 2, der zweite Eintrag die Parität des Exponenten von 3 und der dritte Eintrag die Parität des Exponenten von 5 an. So gehört z.B. $15 = 2^0 3^1 5^1$ zur Möglichkeit (*gerade;ungerade;ungerade*).
Die Möglichkeit (*ungerade;ungerade;ungerade*) entfällt nun, weil schon die kleinste Zahl, die zu dieser Möglichkeit gehört, nämlich $2^1 3^1 5^1 = 30$, nicht mehr in K enthalten ist.

Es bleiben also 7 Möglichkeiten übrig. Da Petra keine zwei Karten mit Zahlen die zur selben Möglichkeit gehören, wählen darf (das Produkt der beiden Zahlen wäre eine Quadratzahl), kann sie also aus den Karten mit Zahlen aus K höchstens 7 wählen. Zusätzlich kann Petra höchstens noch die 9 Karten wählen, deren Zahlen nicht in K liegen, nämlich die Karten mit den Zahlen 7; 11; 13; 14; 17; 19; 21; 22; 23.
Damit kann Petra höchstens 7 + 9 = 16 Karten wählen.

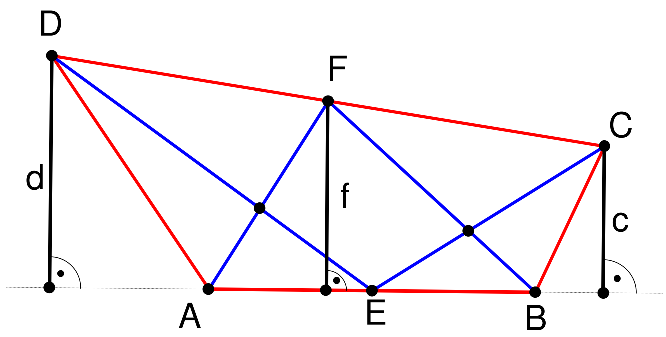
Aufgabe 6

In einem konvexen Viereck ABCD sind E und F die Mittelpunkte der Seiten AB und CD. Außerdem ist G der Schnittpunkt der Strecken AF und ED und H der Schnittpunkt der Strecken EC und BF.
Zeige: Die Summe der Flächeninhalte der Dreiecke AGD und BCH ist so groß wie der Flächeninhalt des Vierecks EHFG.



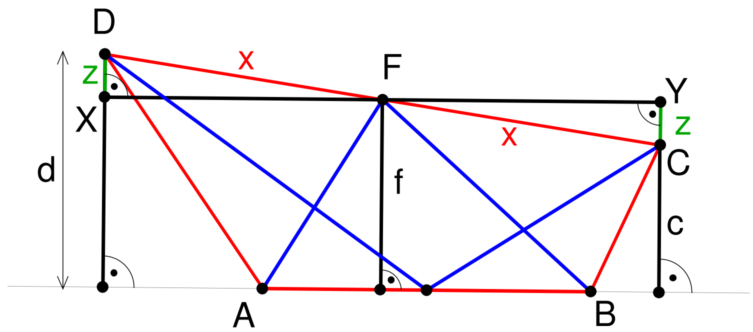
1. Beweisvorschlag:

Wir bezeichnen mit d, f und c die Lote der Punkte C, D bzw. F auf die Gerade AB und auch die Länge dieser Strecken (siehe nebenstehende Zeichnung).



Behauptung 1:
f ist der Mittelwert von d und c, d.h. es gilt $f = \frac{d+c}{2}$.

Beweis der Behauptung 1:
Zeichnet man die Parallele zu AB durch F so ergeben sich die Dreiecke DXF und FCY (s. nebenstehende Zeichnung).
Diese beiden Dreiecke sind kongruente rechtwinklige Dreiecke, da F der Mittelpunkt von DC ist und da d und c orthogonal zu AB stehen.



Somit gilt $z = \overline{DX} = \overline{YC}$. Daher gilt $d = f + z$ und $c = f - z$.

Somit $\frac{1}{2} \cdot (d+c) = \frac{1}{2} \cdot ((f+z)+(f-z)) = f$ und Behauptung 1 ist bewiesen.

Behauptung 2:
Für die Flächeninhalte der Dreiecke gilt $\mathbf{A}(ABF) = \mathbf{A}(AED) + \mathbf{A}(EBC)$.

Beweis der Behauptung 2
Nach Behauptung 1 ist

$$\mathbf{A}(ABF) = \frac{1}{2} \cdot \overline{AB} \cdot f = \frac{1}{2} \cdot \overline{AB} \cdot \frac{d+c}{2} = \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{1}{2} \cdot \overline{AB}\right) \cdot d + \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{1}{2} \cdot \overline{AB}\right) \cdot c .$$

Da E die Mitte von AB ist, gilt $\overline{AE} = \frac{1}{2} \cdot \overline{AB}$ und $\overline{EB} = \frac{1}{2} \cdot \overline{AB}$. Somit folgt

$$\mathbf{A}(ABF) = \frac{1}{2}\cdot\left(\frac{1}{2}\cdot\overline{AB}\right)\cdot d + \frac{1}{2}\cdot\left(\frac{1}{2}\cdot\overline{AB}\right)\cdot c = \frac{1}{2}\cdot\overline{AE}\cdot d + \frac{1}{2}\cdot\overline{EB}\cdot c = \mathbf{A}(AED) + \mathbf{A}(EBC)\,.$$

Somit ist Behauptung 2 bewiesen.

Da das Dreieck ABF aus den Dreiecken AEG, EBH und dem Viereck EHFC zusammengesetzt ist, folgt $\mathbf{A}(ABF) = \mathbf{A}(AEG) + \mathbf{A}(EHFC) + \mathbf{A}(EBH)$. Ebenso gilt $\mathbf{A}(AED) = \mathbf{A}(AEG) + \mathbf{A}(AGD)$ und $\mathbf{A}(EBC) = \mathbf{A}(BCH) + \mathbf{A}(EBH)$.

Nach Behauptung 2 ist also

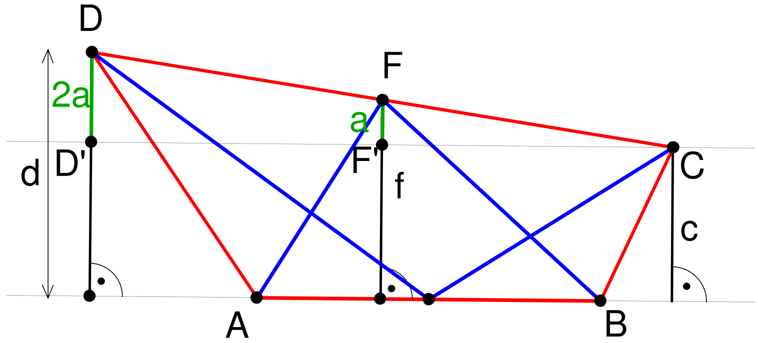
$$\mathbf{A}(AEG) + \mathbf{A}(EHFC) + \mathbf{A}(EBH) = \mathbf{A}(AEG) + \mathbf{A}(AGD) + \mathbf{A}(BCH) + \mathbf{A}(EBH)\,.$$

Durch Subtraktion von $\mathbf{A}(AEG) + \mathbf{A}(EBH)$ ergibt sich die in der Aufgabe geforderte Beziehung

$$\mathbf{A}(EHFC) = \mathbf{A}(AGD) + \mathbf{A}(BCH)\,.$$

Variante 1 zum Beweis von Behauptung 1:

Die Parallele zu AB wird nicht durch den Mittelpunkt F sondern durch den zu AB näherliegenden Punkt (hier C) gezeichnet (s. nebenstehende Zeichnung).
Man erhält die Schnittpunkte D‘ und F‘.



Da F der Mittelpunkt von DC ist und da $FF' \| DD'$, ist FF‘ die Mittelparallele im Dreieck CDD‘. Somit gilt $\overline{DD'} = 2\cdot\overline{FF'}$. Für $a = \overline{FF'}$ folgt also $d = c + 2a$ und $f = c + a$. Somit

$$\frac{1}{2}\cdot(d+c) = \frac{1}{2}\cdot\big((c+2a)+c\big) = c + a = f\,.$$

Dies ist genau die Behauptung 1.

Variante 2 zum Beweis von Behauptung 1:

Seien L,M,K die Lotfußpunkte der drei Lote d, f und c. Dann ist LKCD ein Trapez. Weil F der Mittelpunkt der Strecke CD ist, ist f die Mittellinie im Trapez LKCD. Somit ist f der Mittelwert von d und c:

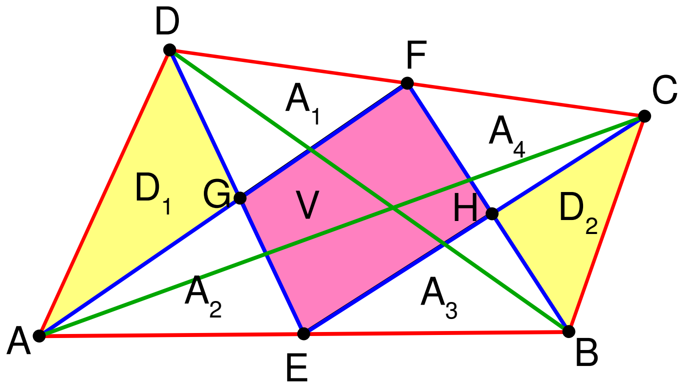
$$f = \frac{1}{2}\cdot(d+c)\,.$$

Somit ist die Behauptung 1 bewiesen.

2. Beweisvorschlag:

Wir verwenden die Bezeichnungen der nebenstehenden Abbildung:

$D_1 = \mathbf{A}(AGD)$, $D_2 = \mathbf{A}(BCH)$,
$V = \mathbf{A}(EHFG)$,
$A_1 = \mathbf{A}(DGF)$, $A_2 = \mathbf{A}(AEG)$,
$A_3 = \mathbf{A}(EBH)$, $A_4 = \mathbf{A}(FHC)$.



Behauptung:
Das Viereck EBFD hat den halben Flächeninhalt des Ausgangsvierecks ABCD, also

$$A_1 + V + A_3 = \frac{1}{2} \cdot \mathbf{A}(ABCD).$$

Beweis der Behauptung:
Es gilt $A_1 + V + A_3 = \mathbf{A}(EBD) + \mathbf{A}(DBF)$.
Nun ist $\mathbf{A}(EBD) = \mathbf{A}(AED)$, da diese beiden Dreiecke gleichlange Grundseiten und gleiche Höhen haben. Ebenso gilt $\mathbf{A}(DBF) = \mathbf{A}(FBC)$.
Somit ist

$$\begin{aligned}\mathbf{A}(ABCD) &= \mathbf{A}(AED) + \mathbf{A}(EBD) + \mathbf{A}(DBF) + \mathbf{A}(FBC) \\ &= 2 \cdot \mathbf{A}(EBD) + 2 \cdot \mathbf{A}(DBF) \\ &= 2 \cdot (\mathbf{A}(EBD) + \mathbf{A}(DBF)) \\ &= 2 \cdot (A_1 + V + A_3)\end{aligned}$$

Daraus folgt die Behauptung.

Analog ist $A_2 + V + A_4 = \frac{1}{2} \cdot \mathbf{A}(ABCD)$. Addiert man diese Gleichung zu

$A_1 + V + A_3 = \frac{1}{2} \cdot \mathbf{A}(ABCD)$, so ergibt sich

$$A_1 + A_2 + A_3 + A_4 + 2V = \mathbf{A}(ABCD). \qquad (*)$$

Die oben abgebildete Zerlegung des Vierecks ABCD ergibt aber auch

$$A_1 + A_2 + A_3 + A_4 + V + D_1 + D_2 = \mathbf{A}(ABCD). \qquad (**)$$

Setzt man die linken Seiten von (*) und (**) gleich, so folgt

$$V = D_1 + D_2.$$

Dies war zu zeigen.