Landeswettbewerb Mathematik
Baden-Württemberg
Musterlösungen 2. Runde 2014/2015

Aufgabe 1

Pauline findet einen Tetraeder. Auf jeder seiner vier Flächen steht eine natürliche Zahl. Pauline führt nun folgende Zahlenspielereien durch: Sie darf die Zahl auf einer Fläche um 1 erhöhen, wenn sie dies auf genau einer anderen Fläche ebenfalls macht. Sie möchte erreichen, dass nach endlich vielen solchen Zügen auf jeder Fläche die gleiche Zahl steht.
Zeige, dass dies genau dann möglich ist, wenn die Summe der vier Anfangszahlen gerade ist.

Beweisvorschlag:

Zunächst nehmen wir an, dass die Summe der vier Anfangszahlen auf dem Tetraeder ungerade ist. Bei jedem Zug erhöht sich die Summe aller Zahlen auf dem Tetraeder um 2, d.h. die Summe bleibt ungerade. Beim Zustand, den Pauline erreichen möchte, ist die Summe aber $4 \cdot S$, wobei die S Zahl ist, die auf jeder Seite steht. Dies ist aber eine gerade Zahl. Der Zustand kann also niemals erreicht werden. Somit muss die Summe der Anfangszahlen gerade sein, wenn Pauline ihr Ziel erreichen will.

Die Summe der vier Anfangszahlen auf dem Tetraeder sei also gerade. Wir bezeichnen die vier Zahlen, die nach dem n–ten Zug auf dem Tetraeder stehen, der Größe nach mit a_n, b_n, c_n und d_n, d.h. es ist $a_n \le b_n \le c_n \le d_n$. Hieraus berechnen wir den "*D–Wert*", nämlich die Summe der drei Differenzen aus der größten Zahl und den drei übrigen Zahlen:

$$\mathrm{D}_n := (d_n - a_n) + (d_n - b_n) + (d_n - c_n).$$

Aus der Konstruktion von D_n ist klar, dass $\mathrm{D}_n \ge 0$ für alle n, und wegen

$$\mathrm{D}_n = 4d_n - (a_n + b_n + c_n + d_n)$$

erkennt man, dass D_n gerade ist. Weiter gilt $\mathrm{D}_n = 0$ genau dann, wenn alle Zahlen auf dem Tetraeder nach dem n–ten Zug gleich sind. Es genügt also zu zeigen, dass es ein Verfahren gibt, bei dem der D–Wert D_n nach endlich vielen Zügen den Wert 0 annimmt. Wir zeigen, dass das folgende Verfahren dies leistet:

> "Wenn nach dem n–ten Zug nicht alle vier Zahlen gleich sind, wähle in einem (n+1)ten Zug unter den vier Zahlen die zwei kleinsten aus und erhöhe diese beiden um 1."

Bei der Berechnung von D_{n+1} unterscheiden wir 3 Fälle:

Fall 1: Es ist $\mathrm{D}_n = 0$. Dann sind alle vier Zahlen gleich und es gibt nichts mehr zu tun.

Fall 2: Es ist $\mathrm{D}_n \ne 0$ und nach dem n–ten Zug gibt mindestens zwei Zahlen, die beide echt kleiner als die größte unter den vier Zahlen sind, d.h. es ist $a_n < d_n$ und $b_n < d_n$ sowie $a_n \leq b_n \leq c_n$. Dann führt der Algorithmus dazu, dass nach dem (n+1)ten Zug die vier Zahlen $a_n + 1$, $b_n + 1$, c_n und d_n auf den Seiten des Tetraeders stehen; und da $a_n < d_n$ und $b_n < d_n$, ist von diesen vier Zahlen d_n immer noch die größte, d.h. es ist $d_{n+1} = d_n$. Damit ist $D_{n+1} = 4d_n - ((a_n + 1) + (b_n + 1) + c_n + d_n) = D_n - 2$.

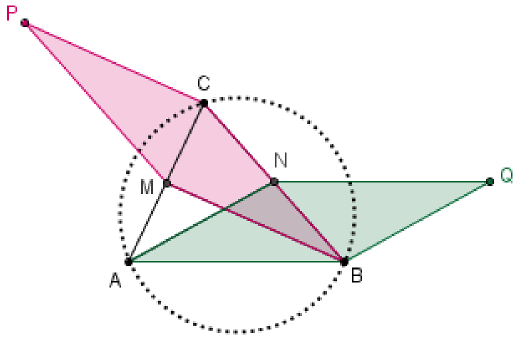
Fall 3: Es ist $D_n \neq 0$ und nach dem n–ten Zug gibt es genau eine Zahl, die kleiner ist als die größte, d.h. es ist $a_n < b_n = c_n = d_n$. Da die Summe der vier Zahlen gerade ist, muss die Anzahl ungerader Zahlen gerade sein, und da $b_n = c_n = d_n$, sind a_n und $b_n = c_n = d_n$ entweder beide gerade oder beide ungerade. In beiden Fällen ist $a_n \leq d_n - 2$. Damit führt dreimaliges Anwenden des Algorithmus zu folgender Situation:

> Nach dem (n+1)ten Zug stehen die Zahlen $a_n + 1$, $b_n = d_n$, $c_n = d_n$ und $d_n + 1$ auf den Seiten des Tetraeders, und es ist $a_n+1 < b_n = c_n < d_n + 1$;
> nach dem (n+2)ten Zug stehen die Zahlen $a_n + 2$, $b_n = d_n$, $c_n + 1$ und $d_n + 1$ auf den Seiten des Tetraeders, und es ist $a_n + 2 \leq b_n < c_n + 1 = d_n + 1$;
> nach dem (n+3)ten Zug die Zahlen $a_n + 3$, $b_n +1 = d_n + 1$, $c_n +1 = d_n + 1$ und $d_n + 1$ auf den Seiten des Tetraeders, und es ist
> $$\begin{aligned} D_{n+3} &= 4(d_n + 1) - ((a_n + 3) + (b_n + 1) + (c_n + 1) + (d_n + 1)) = \\ &= 4d_n + 4 - (a_n + b_n + c_n + d_n + 6) \\ &= 4d_n - (a_n + b_n + c_n + d_n) - 2 = D_n - 2. \end{aligned}$$

In allen Fällen erhalten wir, wenn $D_n \neq 0$, spätestens nach dem ($n + 3$)ten Zug einen um 2 kleineren D – Wert. Da dieser D–Wert stets ganzzahlig ist und nicht negativ werden kann, erreicht er irgendwann den Wert 0. Dies war zu zeigen.

Aufgabe 2

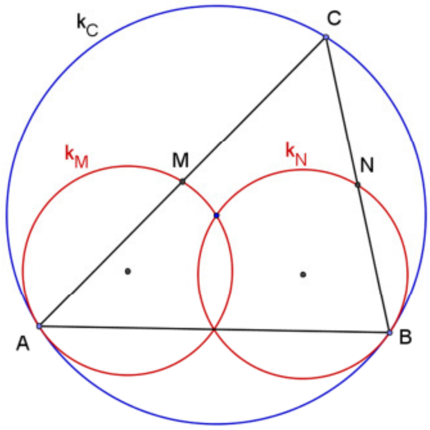
Auf einem Kreis liegen zwei verschiedene Punkte A und B sowie ein weiterer Punkt C. Der Mittelpunkt von AC wird mit M bezeichnet, der Mittelpunkt von BC mit N. Der Punkt P bildet mit M, B und C das Parallelogramm MBCP, der Punkt Q mit N, A und B das Parallelogramm NABQ.



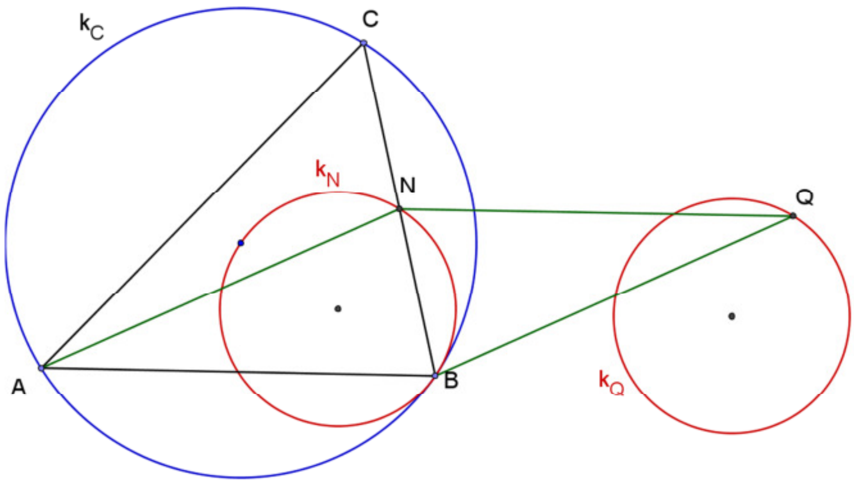
Zeige: Wenn sich C auf dem gegebenen Kreis bewegt, dann bewegen sich P und Q auch jeweils auf einem Kreis, und die Radien dieser drei Kreise stehen im Verhältnis 3 : 2 : 1.

1. Beweisvorschlag (Mit zentrischer Streckung an B bzw. L):

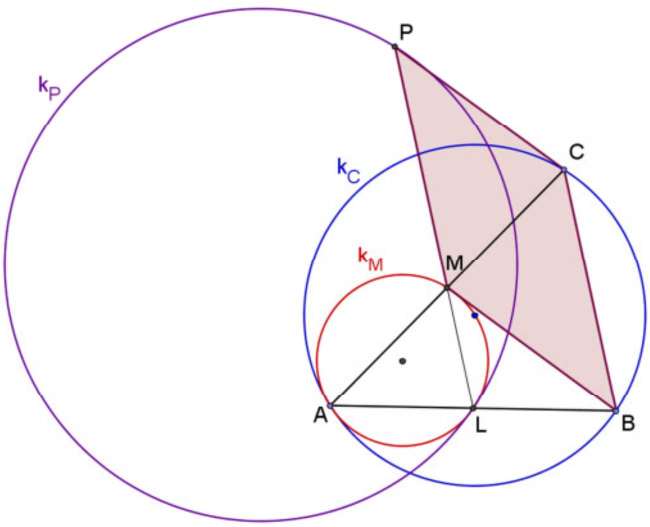
Wenn sich C auf dem gegebenen Kreis k_C mit dem Radius r bewegt, so bewegen sich die Mittelpunkte M und N der Seiten AC bzw. BC auf Kreisen k_M bzw. k_N, die aus k_C durch zentrische Streckungen mit dem Streckfaktor $\frac{1}{2}$ und den Zentren A bzw. B hervorgehen.
Die Radien von k_M und k_N sind deshalb jeweils $\frac{r}{2}$.



Für jede Lage von C auf k_C entsteht der Punkt Q aus N durch Verschiebung um eine Strecke der Länge $\overline{AB}$ in Richtung von A nach B (d.h. $\overline{AB} = \overline{NQ}$). Bewegt sich also C auf k_C, so bewegt sich N auf k_N und Q auf einem zu k_N kongruenten Kreis k_Q mit dem gleichen Radius $\frac{r}{2}$ wie k_N.



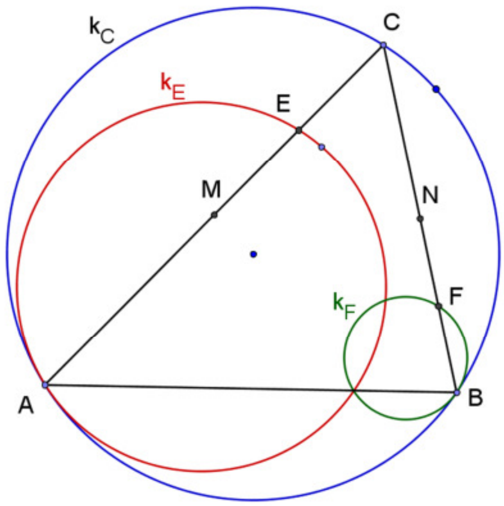
Sei L der Mittelpunkt von AB.
Die Strecke LM ist als Mittelparallele des Dreiecks ABC halb so lang wie die Strecke BC. Die Seite MP des Parallelogramms MBCP ist genau so lang wie die gegenüber liegende Seite BC. Somit ist LM halb so lang wie MP.
Der Punkt P liegt also auf der zu BC parallelen Geraden durch L und M und ist von L dreimal so weit entfernt wie M.



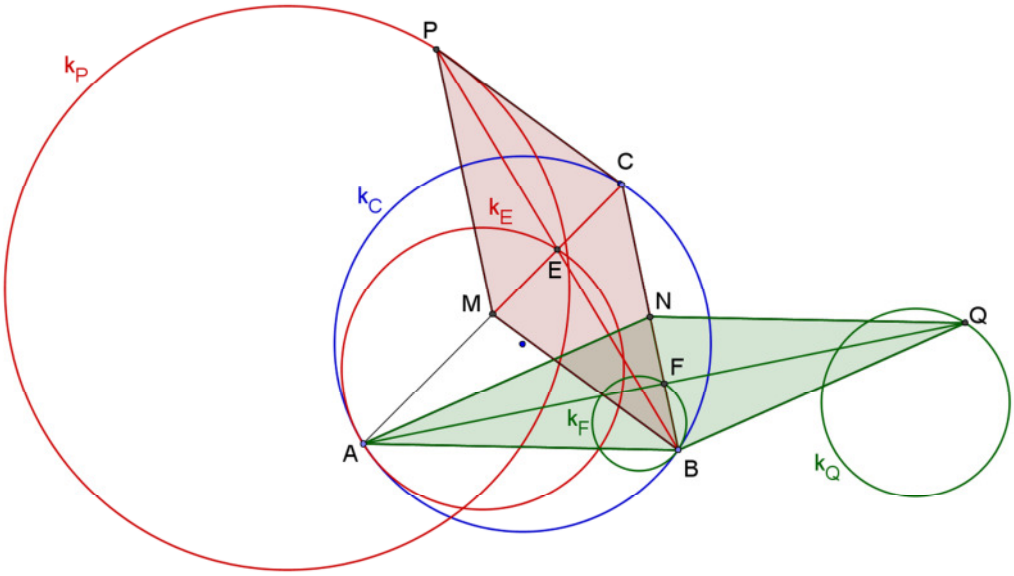
Wenn sich C auf k_C bewegt, bewegen sich also M auf k_M und P auf dem Kreis k_P, der aus k_M durch zentrische Streckung mit dem Zentrum L und dem Streckfaktor 3 hervorgeht und der deshalb den Radius $3 \cdot \frac{r}{2}$ besitzt.
Somit stehen die Radien der Kreise k_P, k_C und k_Q im Verhältnis 3 : 2: 1,

2. Beweisvorschlag (Mit zentrischer Streckung am Mittelpunkt von MC bzw. NB):

Sei E der Mittelpunkt von MC, F der Mittelpunkt von NB.
Wenn sich C auf dem gegebenen Kreis k_C mit dem Radius r bewegt, bewegt sich E auf einem Kreis k_E , der aus k_C durch zentrische Streckung mit dem Zentrum A und dem Streckfaktor $\frac{3}{4}$ hervorgeht, und F bewegt sich auf einem Kreis k_F, der aus k_C durch zentrische Streckung mit dem Zentrum B und dem Streckfaktor $\frac{1}{4}$ hervorgeht.
Die Radien von k_E und k_F sind deshalb $\frac{3}{4}r$ bzw. $\frac{1}{4}r$.



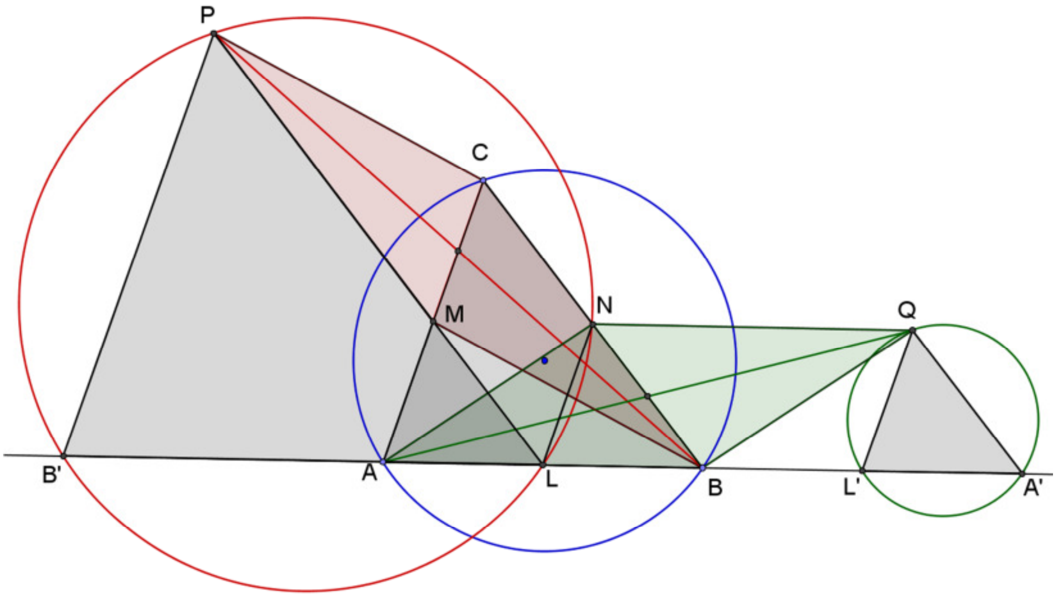
Da E der Schnittpunkt der Diagonalen des Parallelogramms MBCP ist, liegt P auf der Geraden BE und P ist von B doppelt so weit entfernt wie E.
Da F der Schnittpunkt der Diagonalen des Parallelogramms NABQ ist, liegt Q auf der Geraden AF und Q ist von A doppelt so weit entfernt wie F.
Wenn sich C auf k_C bewegt, bewegen sich E auf k_E und P auf dem Kreis k_P, der aus k_E durch zentrische Streckung mit dem Zentrum B und dem Streckungsfaktor 2 hervorgeht und deshalb den Radius $2 \cdot \left(\frac{3}{4}r\right) = \frac{3}{2}r$ besitzt.



Außerdem bewegen sich F auf k_F und Q auf dem Kreis k_Q, der aus k_F durch zentrische Streckung an A mit dem Streckungsfaktor 2 hervorgeht und deshalb den Radius $2 \cdot \frac{1}{4}r = \frac{1}{2}r$ besitzt.

Die Radien der Kreise k_P, k_C und k_Q verhalten sich also wie 3 : 2 : 1.

3. Beweisvorschlag (Mit Punktspiegelungen):



Es gelten nach Aufgabenstellung die folgenden **Behauptungen**:

I. Die Gerade durch P und M schneidet die Gerade AB in L.
Da das Viereck PMBC nach Voraussetzung ein Parallelogramm ist, gilt: $\overline{PM} = \overline{CB}$ und PM||CB. Damit liegen M und L auf der Parallelen zu BC durch P.

II. Da M Mittelpunkt der Strecke AC ist, ist ML Mittelparallele im Dreieck ABC. Also ist L der Mittelpunkt der Strecke AB und $\overline{ML} = \frac{1}{2}\overline{CB}$.
Und da N Mittelpunkt von BC ist, ist LN Mittelparallele zur Seite AC und damit $\overline{LN} = \frac{1}{2}\overline{AC}$.

III. Spiegle die Punkte L und A an B und erhalte die Spiegelpunkte L' und A'. Spiegle B an A und erhalte den Spiegelpunkt B'.
Wegen der Längentreue der Punktspiegelung gilt: $\overline{L'B} = \overline{LB}$, $\overline{A'B} = \overline{AB}$ und $\overline{BA} = \overline{B'A}$.

IV. Da das Viereck ABQN ein Parallelogramm ist, gilt NQ||AB und $\overline{AB} = \overline{NQ}$.

V. Das Viereck LL'QN ist ein Parallelogramm, denn
$\overline{LL'} = \overline{LB} + \overline{BL'} = 2 \cdot \overline{LB} = 2 \cdot \frac{1}{2}\overline{AB} = \overline{AB} = \overline{NQ}$ und AB || NQ und damit auch LL' || NQ.
Daraus folgt $\overline{L'Q} = \overline{LN}$ und L'Q||LN. Mit Behauptung II folgt zusätzlich L'Q||AC und $\overline{L'Q} = \frac{1}{2}\overline{AC}$.

Nun zum eigentlichen **Beweis** der Aufgabe:
Sei k_C der in der Aufgabe gegebene Kreis, auf dem die Punkt A, B und C liegen. Der Radius von k_C sei r.
Die Dreiecke ABC und B'LP sind ähnlich mit dem Ähnlichkeitsfaktor $\frac{3}{2}$, denn es gilt:

- $\sphericalangle$ PLB' = $\sphericalangle$ CBA (Stufenwinkel an den Parallelen CB und PL und Behauptung I).
- $\overline{PL} = \overline{PM} + \overline{ML} = \overline{CB} + \frac{1}{2}\overline{CB} = \frac{3}{2}\overline{CB}$ (nach Behauptung II
- $\overline{B'L} = \overline{B'A} + \overline{AL} = \overline{AB} + \frac{1}{2}\overline{AB} = \frac{3}{2}\overline{AB}$ (nach Behauptung III)

Sei k_P der Kreis durch B' und A, der den Radius $\frac{3}{2}r$ hat und dessen Mittelpunkt auf derselben Seite der Geraden durch A und B liegt, wie der Mittelpunkt des Kreises k_C (s. Abb.).

Dann folgt aus dem eben Bewiesenen:
(1) Wenn C sich auf k_C bewegt, so bewegt sich P auf k_P. Die Radien der beiden Kreise k_P und k_C verhalten sich wie 3:2.

Die Dreiecke ABC und L'A'Q sind ähnlich mit dem Ähnlichkeitsfaktor $\frac{1}{2}$, denn es gilt:

- $\sphericalangle A'L'Q = \sphericalangle BAC$ (Stufenwinkel an den Parallelen AC und L'Q und I)
- $\overline{L'Q} = \frac{1}{2}\overline{AC}$ (nach Behauptung V)
- $\overline{L'A'} = \overline{BA'} - \overline{BL'} = \overline{AB} - \overline{BL} = \frac{1}{2}\overline{AB}$ (nach Behauptungen II und III)

Sei k_Q der Kreis durch L' und A', der den Radius $\frac{1}{2}r$ hat und dessen Mittelpunkt auf derselben Seite der Geraden durch A und B liegt, wie der Mittelpunkt des Kreises k_C (s. Abb.).

Dann folgt aus dem eben Bewiesenen:
(2) Wenn C sich auf k_C bewegt, dann bewegt sich Q auf k_Q. Die Radien der beiden Kreise k_Q und k_C verhalten sich wie 2:1.

Aus (1) und (2) folgt die jetzt Behauptung.

Aufgabe 3

Frieda holt mit geschlossenen Augen aus einem Säckchen zwei grüne Murmeln. Nachdem sie die Murmeln wieder zurückgelegt hat, ist Fred an der Reihe: „Oh, zwei blaue, das sind meine Lieblingsmurmeln.“
Frieda, die den Inhalt des Säckchens kennt, meint: „So erstaunlich ist das nicht! Die Wahrscheinlichkeit für zwei blaue Murmeln war genau 0,5.“

a) Wie viele blaue Murmeln befanden sich mindestens in dem Säckchen?

b) Frieda will den Inhalt des Säckchens so verändern, dass die Wahrscheinlichkeit, mit einem Griff zwei blaue Murmeln zu ziehen, genau 0,25 beträgt.
Fred behauptet: „Das ist unmöglich!“
Zeige, dass Fred recht hat.

Lösung:

Zu a): Es befinden sich mindestens **15 blaue Murmeln** in dem Säckchen.

1. Beweisvorschlag (Produkte aufeinanderfolgender Zahlen):

Die Anzahl der blauen Murmeln in dem Säckchen sei b, die Gesamtzahl der Murmeln sei n. Die Wahrscheinlichkeit, beim zweimaligen Ziehen ohne Zurücklegen zwei blaue Murmeln zu ziehen, ist dann mit der Pfadregel

$$p = \frac{b}{n} \cdot \frac{b-1}{n-1}.$$

a) Da Frieda zwei grüne Murmeln gezogen hat, gilt auf jeden Fall $n \geq b+2$.
Nun soll p = 0,5 sein, woraus sich

$$2b(b-1) = n(n-1)$$

ergibt.
In der folgenden Tabelle für den Term $b(b-1)$ sucht man nun Werte von b, für die das Doppelte des Tabellenwerts weiter hinten in der Tabelle wieder auftritt. Denn der Term $n(n-1)$ ist ja ebenfalls ein Produkt von zwei aufeinanderfolgenden natürlichen Zahlen und muss daher in der zweiten Zeile der Tabelle vorkommen. Dort kann man den zu b gehörigen Wert von n ablesen.

b	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
b(b-1)	2	6	12	20	30	42	56	72	90	110	132

b	13	14	15	16	17	18	19	20	21	…	
b(b-1)	156	182	210	240	272	306	342	380	420	…	

Der kleinste Wert für b, den man so findet, ist b = 3. Zu b = 3 ist $b(b-1) = 6$. Das Doppelte dieses Tabellenwerts, nämlich 12 kommt ebenfalls in der Tabelle vor. Der zu b gehörige Wert n mit $n(n-1) = 12$ ist n = 4. Für n = 4 ist aber die Bedingung $n \geq b+2$ verletzt, also kommt b = 3 nicht in Frage.

Der nächst größere Wert von b, den man findet, ist b = 15. Dann ist $b(b-1)=210$ und das Doppelte zu 210, nämlich 420, taucht in der Tabelle ebenfalls auf. Als zugehörigen Wert von n liest man n = 21 ab. Somit ist $n \geq b+2$ erfüllt.
Also befinden sich **mindestens 15 blaue Murmeln** im Säckchen.

b) Wäre $p=\frac{b}{n}\cdot\frac{b-1}{n-1}=0{,}25=\frac{1}{4}$, so $4b(b-1)=n(n-1)$.
Wir zeigen, dass zu jeder natürlichen Zahl b die Zahl $4b(b-1)$ nicht in der zweiten Zeile der obigen Tabelle auftauchen kann. Dann ist $4b(b-1)=n(n-1)$ nicht möglich und die Annahme $p=0{,}25$ ist widerlegt.

Es ist $4b(b-1)=2b(2b-2)$. Folglich gilt

$$(2b-1)(2b-2)<2b(2b-2)=4b(b-1)<2b(2b-1).$$

Die Zahlen $(2b-1)(2b-2)$ und $2b(2b-1)$ sind zwei aufeinanderfolgende Zahlen in der zweiten Zeile der obigen Tabelle. Da $4b(b-1)$ echt zwischen $(2b-1)(2b-2)$ und $2b(2b-1)$ liegt, kann $4b(b-1)$ nicht in der Tabelle vorkommen.
Somit ist bewiesen, dass $p=0{,}25$ nicht möglich ist. Fred hat also recht.

2. Beweisvorschlag (Abschätzung von Wahrscheinlichkeiten):

a) wird wie im ersten Beweisvorschlag bewiesen.

b) Wir führen die Annahme, es gäbe natürliche Zahlen b und n mit $p=\frac{b}{n}\cdot\frac{b-1}{n-1}=0{,}25=\frac{1}{4}$ zum Widerspruch. Es ist

$$\left(\frac{1}{2}\right)^2=0{,}25=\frac{b(b-1)}{n(n-1)}<\frac{b^2}{(n-1)^2}=\left(\frac{b}{n-1}\right)^2,$$

also ist $\frac{1}{2}<\frac{b}{n-1}$ bzw. $\frac{1}{2}(n-1)<b$ oder $n<2b+1$.

Analog ist

$$\left(\frac{1}{2}\right)^2=0{,}25=\frac{b(b-1)}{n(n-1)}>\frac{(b-1)^2}{n^2}=\left(\frac{b-1}{n}\right)^2$$

also ist $\frac{1}{2}>\frac{b-1}{n}$ bzw. $\frac{1}{2}n>b-1$ oder $n>2b-2$.

Aus $2b-2<n<2b+1$ folgt also $n=2b-1$ oder $n=2b$. Wenn $n=2b-1$ so

$$p=\frac{b(b-1)}{n(n-1)}=\frac{b(b-1)}{(2b-1)(2b-2)}=\frac{b(b-1)}{(2b-1)2(b-1)}=\frac{1}{2}\cdot\frac{b}{2b-1}>\frac{1}{2}\cdot\frac{b}{2b}=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}=\frac{1}{4},$$

also ist $p\neq 0{,}25$. Wenn $n=2b$ so

$$p=\frac{b(b-1)}{n(n-1)}=\frac{b(b-1)}{2b(2b-1)}=\frac{1}{2}\cdot\frac{b-1}{2b-1}<\frac{1}{2}\cdot\frac{b-1}{2b-2}=\frac{1}{2}\cdot\frac{b-1}{2(b-1)}=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}=\frac{1}{4},$$

also ebenfalls $p\neq 0{,}25$. Somit ist $p=0{,}25$ nicht möglich. Fred hat recht.

3. Beweisvorschlag (Wahrscheinlichkeiten für alle möglichen Ergebnisse):

a) wird wie im ersten Beweisvorschlag bewiesen.

b)

Vorbemerkung: Seien b und n natürliche Zahlen mit $n > 1$.

Dann ist $b < n$ äquivalent zu $\frac{b-1}{n-1} < \frac{b}{n}$.

Beweis der Vorbemerkung: $\frac{b-1}{n-1} < \frac{b}{n}$ ist äquivalent zu $(b-1)n < b(n-1)$. Dieses ist wiederum äquivalent zu $-n < -b$ bzw. $b < n$. Somit ist die Vorbemerkung bewiesen.

Wir unterscheiden im Beweis der Aufgabe nun zwei Fälle:

Fall 1: Höchstens die Hälfte aller Kugeln ist blau, d.h. $b \le \frac{1}{2}n$.

Dann ist $\frac{b}{n} \le \frac{1}{2}$, d.h. die Wahrscheinlichkeit, dass die erste gezogene Kugel blau ist, ist kleiner oder gleich 0,5. Die Wahrscheinlichkeit $\frac{b-1}{n-1}$ dass die zweite gezogene Kugel ebenfalls blau ist, ist kleiner als bei der ersten Ziehung, denn nach der Vorbemerkung ist $\frac{b-1}{n-1} < \frac{b}{n}$. Also ist in diesem Fall

$$\frac{b-1}{n-1} < \frac{1}{2}, \quad \text{d.h.} \quad p = \frac{b}{n} \cdot \frac{b-1}{n-1} < \frac{1}{4}.$$

Fall 2: Mehr als die Hälfte aller Kugeln ist blau, d.h. $b > \frac{1}{2}n$.

Wir betrachten die Wahrscheinlichkeiten der vier möglichen Ergebnisse der Ziehung, nämlich „BB“, „$B\overline{B}$“, „$\overline{B}B$“ und „$\overline{B}\overline{B}$“ („B“ steht für blau, „$\overline{B}$“ für „nicht blau“).

Es ist $p(BB) = p$.

Wegen $b > \frac{1}{2}n$ ist $n < 2b$, also $n \le 2b-1$ bzw. $n-b \le b-1$. Daraus folgt

$$p(B\overline{B}) = \frac{b}{n} \cdot \frac{n-b}{n-1} \le \frac{b}{n} \cdot \frac{b-1}{n-1} = p.$$

Ebenso folgt $p(\overline{B}B) \le p$.

Aus $n < 2b$ folgt auch $n-1-b < 2b-1-b = b-1 < b$. Also

$$p(\overline{B}\overline{B}) = \frac{n-b}{n} \cdot \frac{n-1-b}{n-1} < \frac{b-1}{n} \cdot \frac{b}{n-1} = p.$$

Da es nur die vier Möglichkeiten BB, $B\overline{B}$, $\overline{B}B$ und $\overline{B}\overline{B}$ gibt, ist

$$p(BB) + p(B\overline{B}) + p(\overline{B}B) + p(\overline{B}\overline{B}) = 1.$$

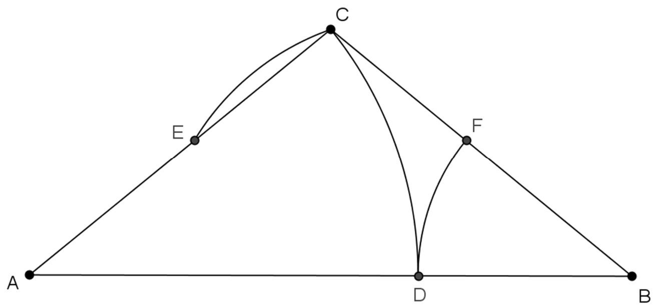
Aus dem eben bewiesenen folgt aber $p(BB) + p(B\overline{B}) + p(\overline{B}B) + p(\overline{B}\overline{B}) < p + p + p + p = 4p$.

Somit ist in diesem Fall $1 < 4p$ bzw. $p > \frac{1}{4}$.

In beiden Fällen ist also p = 0,25 unmöglich. Fred hat recht.

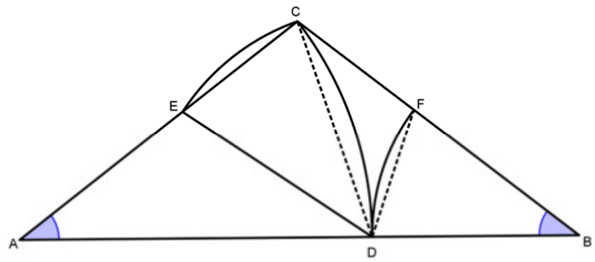
Aufgabe 4

Das Dreieck ABC ist gleichschenklig mit der Basis AB und $\sphericalangle ACB > 60°$. Die Punkte A, B und D sind die Mittelpunkte der eingezeichneten Kreisbögen.
Zeige, dass die Strecken EF und AB parallel sind.



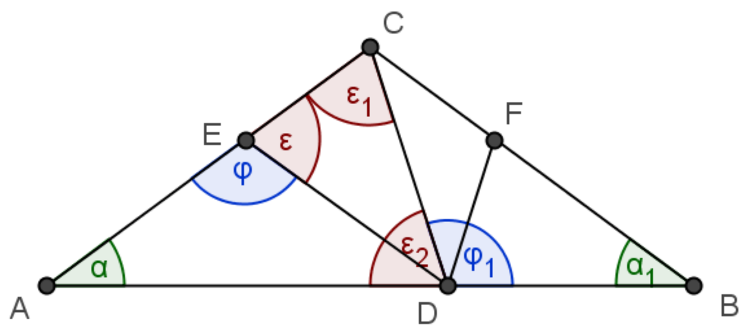
Vorbemerkung:

Beachte, dass die Konstruktion des Dreiecks wie in der Abbildung möglich ist, da $\sphericalangle ACB > 60°$. Deshalb ist AB die längste Seite im Dreieck und der Kreis um A mit Radius AC hat einen Schnittpunkt D mit der Seite AB.



1. Beweisvorschlag (mit Kongruenzsatz SWW):

Wir verwenden die Winkelbezeichnungen der folgenden Zeichnung und zeigen zunächst, dass diejenigen Winkel gleich groß sind, die mit dem gleichen griechischen Buchstaben bezeichnet werden:

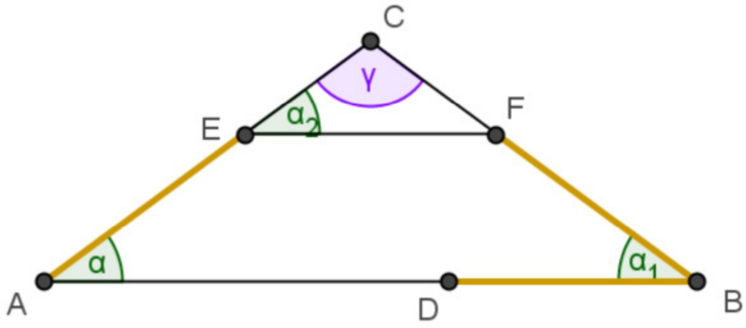


Da das Dreieck ABC gleichschenklig mit Basis $\overline{AB}$ ist, gilt $\alpha = \alpha_1$. Die Kreisbögen in der zur Aufgabenstellung gehörigen Zeichnung zeigen, dass $\overline{DE} = \overline{DC}$ und $\overline{DA} = \overline{CA}$ ist. Daher ist $\varepsilon = \varepsilon_1$ (Basiswinkel im gleichschenkligen Dreieck CED) und $\varepsilon_1 = \varepsilon_2$ (Basiswinkel im gleichschenkligen Dreieck DCA). Schließlich sind die Winkel φ und φ_1 gleich groß, weil sie jeweils die Nebenwinkel der gleich großen Winkel ε bzw. ε_2 sind.

Nun zeigen wir, dass die Dreiecke ADE und BCD kongruent zueinander sind:
Es gilt $\overline{CB} = \overline{CA}$ (da Dreieck ABC gleichschenklig ist) und $\overline{DA} = \overline{CA}$ (s.o.). Also stimmen die Dreiecke in einer Seite überein ($\overline{DA} = \overline{CB}$). Sie stimmen auch in einem dieser Seite

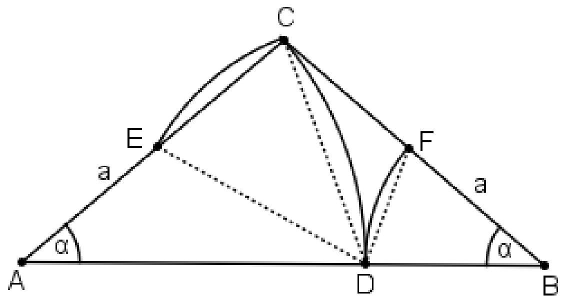
anliegenden Winkel ($\alpha = \alpha_1$) sowie in dem dieser Seite gegenüberliegenden Winkel überein ($\varphi = \varphi_1$). Daher sind die Dreiecke nach dem Kongruenzsatz sww kongruent.

Da die Dreiecke kongruent sind, sind entsprechende Seiten gleich lang, insbesondere ist $\overline{AE} = \overline{BD}$. Dies ist aber auch der Radius des Kreisbogens um B, also ist $\overline{AE} = \overline{BF}$:



Somit ist auch das Dreieck EFC gleichschenklig: $\overline{EC} = \overline{AC} - \overline{AE} = \overline{BC} - \overline{BF} = \overline{FC}$.
Für den Basiswinkel α_2 in diesem Dreieck gilt $2\alpha_2 + \gamma = 180°$ (Winkelsumme), also ist α_2 gleich groß wie der Basiswinkel α im Dreieck ABC, für den ja ebenfalls $2\alpha + \gamma = 180°$ gilt. Da nun die Stufenwinkel α und α_2 an den Geraden AB bzw. EF gleich groß sind, müssen die Geraden parallel zueinander sein.

2. Beweisvorschlag (mit Ähnlichkeiten):



Wegen $\overline{AC} = \overline{BC} = a$ gilt $\sphericalangle BAC = \sphericalangle CBA = \alpha$.

Da $\overline{AC} = \overline{AD} = a$ gilt:

$$\sphericalangle CDA = \sphericalangle ACD = \left(180^0 - \alpha\right) : 2 = 90^0 - \frac{\alpha}{2} \qquad (1)$$

Da $\overline{DC} = \overline{DE}$ gilt:

$$\sphericalangle ECD = \sphericalangle ACD = \sphericalangle DEC = 90^0 - \frac{\alpha}{2} \text{ und}$$

$$\sphericalangle CDE = 180^0 - 2 \cdot \left(90^0 - \frac{\alpha}{2}\right) = \alpha \qquad (2)$$

Nach (1) und (2) haben die Dreiecke CED und DCA gleich große Innenwinkel; sie sind also ähnlich und es gilt: $\overline{CE} : \overline{DC} = \overline{DC} : \overline{AC} = \overline{DC} : a \Leftrightarrow \overline{CE} = \frac{\overline{DC}^2}{a}$ (3)

Mit (1) gilt: $\sphericalangle BDC = 180^0 - \sphericalangle CDA = 180^0 - \left(90^0 - \frac{\alpha}{2}\right) = 90^0 + \frac{\alpha}{2}$ (Nebenwinkel) (4)

Da $\overline{BD} = \overline{BF}$, gilt: $\sphericalangle BDF = \sphericalangle DFB = \left(180^0 - \alpha\right) : 2 = 90^0 - \frac{\alpha}{2}$ (5)

Folglich: $\sphericalangle CFD = 180^0 - \sphericalangle DFB = 180^0 - \left(90^0 - \frac{\alpha}{2}\right) = 90^0 + \frac{\alpha}{2}$ (6)

Mit (4) und (5) gilt: $\sphericalangle FDC = \sphericalangle BDC - \sphericalangle BDF = 90^0 + \frac{\alpha}{2} - \left(90^0 - \frac{\alpha}{2}\right) = \alpha = \sphericalangle CBD$ (7)

Aus (4), (6) und (7) folgt: Die Dreiecke DFC und DBC sind ähnlich.

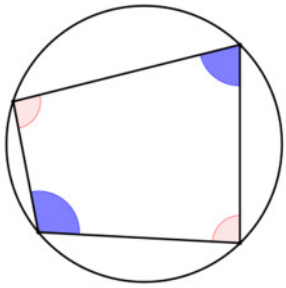
Demnach gilt: $\overline{CF} : \overline{DC} = \overline{DC} : \overline{BC} = \overline{DC} : a \Leftrightarrow \overline{CF} = \frac{\overline{DC}^2}{a}$ (8)

(3) und (8) ergibt: $\overline{CE} = \overline{CF}$.

Daraus folgt: Dreieck EFC ist gleichschenklig mit $\sphericalangle ACB = \sphericalangle ECF = 180^0 - 2 \cdot \alpha$
Demnach ist: $\sphericalangle FEC = \sphericalangle CFE = \alpha$
Da $\sphericalangle BAC = \sphericalangle FEC = \alpha$, sind AB und EF parallel (Stufenwinkel)

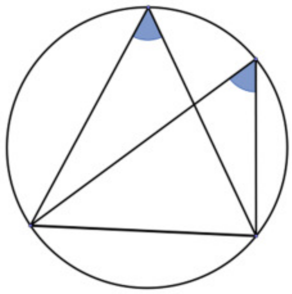
3. Beweisvorschlag (Satz vom Sehnenviereck und Umfangswinkelsatz):

Vorbemerkungen:



In diesem Beweis der Aufgabe werden die folgenden beiden geometrische Sätze verwendet:

a) Umkehrung des Satzes vom Sehnenviereck:
Wenn sich in einem Viereck zwei gegenüberliegende Winkel zu 180° ergänzen, so liegen die Ecken auf einem Kreis.



b) Satz vom Umfangswinkel:
Die Umfangswinkel über einer Kreissehne sind alle gleich weit.

Der Beweis der Aufgabe erfolgt in drei Schritten:

Schritt I: *Das Viereck EDFC ist ein Sehnenviereck, d.h. die Punkte E, D, F und C liegen auf einem Kreis. Dazu wird gezeigt, dass sich die Winkel $\sphericalangle$ DEC und $\sphericalangle$ CFD im Viereck EDFC zu 180° ergänzen:*

Beweis von Schritt I:

1) $\sphericalangle$ BAC = $\sphericalangle$ CBA = α, denn $\sphericalangle$ BAC und $\sphericalangle$ CBA sind Basiswinkel im Dreieck ΔABC.

2) $\sphericalangle$ DFB = $90° - \frac{\alpha}{2}$, denn $\sphericalangle$ DFB ist ein Basiswinkel im gleichsch. Dreieck ΔDBF.

3) $\sphericalangle$ CFD = $90° + \frac{\alpha}{2}$, denn $\sphericalangle$ CFD ist Nebenwinkel des Winkels $\sphericalangle$ DFB.

4) $\sphericalangle$ ACD = $90° - \frac{\alpha}{2}$, denn $\sphericalangle$ ACD ist ein Basiswinkel im gleichsch. Dreieck ΔADC.

5) $\sphericalangle$ DEC = $90° - \frac{\alpha}{2}$, denn $\sphericalangle$ DEC ist ein Basiswinkel im gleichsch. Dreieck ΔDCE.

Somit gilt mit 3) und 5): $\sphericalangle DEC + \sphericalangle CFD = \left(90° + \frac{\alpha}{2}\right) + \left(90° - \frac{\alpha}{2}\right) = 180°$,

d.h. gegenüberliegende Winkel im Viereck EDFC ergänzen sich zu 180°.
Aus der Umkehrung des Satzes vom Sehnenviereck (Vorbemerkung a)) folgt damit, dass die Punkte E, D, F und C auf einem Kreis liegen.

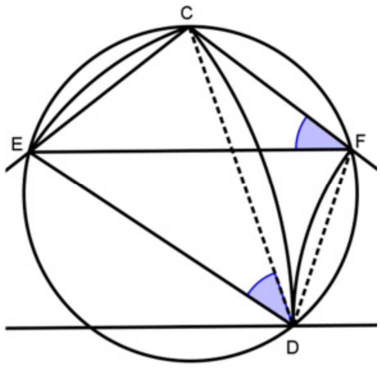
Schritt II: *Der Winkel $\sphericalangle CFE$ hat die gleiche Weite wie der Winkel $\sphericalangle CDE$.*

Beweis von Schritt II:

Im gleichschenkligen Dreieck ΔDCE haben die Basiswinkel $\sphericalangle ECD$ und $\sphericalangle DEC$ die Weite

$\sphericalangle ECD = \sphericalangle DEC = 90° - \frac{\alpha}{2}$ (siehe Schritt I.).

Somit gilt: $\sphericalangle CDE = 180° - \sphericalangle ECD - \sphericalangle DEC = \alpha$.
Die Winkel $\sphericalangle CDE$ und $\sphericalangle CFE$ sind Umfangswinkel im Sehnenviereck EDFC über der Sehne EC.
Mit dem Umfangswinkelsatz folgt:
$\sphericalangle CDE = \sphericalangle CFE = \alpha$.



Schritt III: *Die Strecken EF und AB sind parallel.*

Beweis von Schritt III:

Mit $\sphericalangle CBA = \sphericalangle CFE = \alpha$ folgt aus dem Stufenwinkelsatz die Parallelität der Strecken AB und EF.